

40

Math. P.

401

-1-

4^o Math. P. 401 / 1



4- Math. P. 401 / 1

B e i t r ä g e

z u r

Lehrungswürdigen Lehrer und verehrten Freunde

Theorie bestimmter Integrale

von Ludwig Albrecht Kunze,

v o n

Dr. Oskar Schlömilch, Professor der Mathematik an der Universität zu Bonn, Mitglied des Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin und Ehrenmitglied der Gesellschaft der Freunde der mathematischen Wissenschaften zu Bonn.

Dr. Oskar Schlömilch.

als ein Zeichen seiner innigsten Dankbarkeit

8

141

J e n a ,

F r i e d r i c h F r o m m a n n .

1843.

1190/346

S e i n e m

verehrungswürdigen Lehrer und väterlichen Freunde

H e r r n

Carl Ludwig Albrecht Kunze,

Doktor der Philosophie, Professor der Mathematik am Gymnasium zu Weimar, Mitglied der Königl. Akademie
gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt und Ehrenmitglied der Gesellschaft zur Verbreitung
der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg,

widmet diese Schrift

als ein Zeichen seiner innigsten Dankbarkeit

der Verfasser.

Seinem

verehrungswürdigen Lehrer und väterlichen Freunde

Herrn

Carl Ludwig Albrecht Kunze

Hochzuverehrer, Professor der Philosophie am Gymnasium zu Weimar, Mitglied der Königl. Akademie
geachteter Wissenschaftler zu Berlin und Ehrenmitglied der Gesellschaft zur Förderung
der naturwissenschaftlichen Wissenschaften zu Hamburg.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

als ein Zeichen seiner innigsten Dankbarkeit

der Verfasser

Albrecht

Kunze

1864

1864

1864

1864

1864

1864

1864

1864

1864

1864

1864

V o r r e d e.

Wenn wir die Analysis des Unendlichen zur Erforschung des Spieles der Naturkräfte anwenden, so erhalten wir im Allgemeinen den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung immer in der Form eines Integrales und zwar eines bestimmten, weil jene Wirkungen innerhalb gewisser, von Raum oder Zeit abhängiger Gränzen vor sich gehen. So lange die letzteren endliche Gröfsen sind, bietet die Ausführung der angedeuteten Integrationen nach einer Veränderlichen keine besonderen Schwierigkeiten dar, da man in den Fällen, wo dieselben in geschlossener Form nicht zu bewerkstelligen sind, seine Zuflucht zu den unendlichen Reihen nehmen kann. Anders gestaltet sich aber die Sache, wenn jene Integrationsgränzen unendliche Werthe annehmen. Hier tritt der fatale Umstand ein, daß jene Reihen fast immer unbrauchbar werden, namentlich dann, wenn sie nach Potenzen derjenigen Gröfsen geordnet sind, deren Werthe man ins Unendliche ausdehnen will. Ein sehr einfaches Beispiel der Art liefert das Integral

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx.$$

In geschlossener Form läßt sich dasselbe nicht angeben, dagegen findet man durch Substitution der bekannten Reihe für $\sin x$, daß es der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{a^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

gleich ist. Obschon diese immer convergirt, so wird sie doch unbrauchbar, sobald man $a = \infty$ nimmt, da man ihr nicht ansehen kann, welcher Gränze sich ihre Summe für wachsende a nähert. Betrachtet man aber das Integral von einer anderen Seite, so läßt sich der wahre Werth desselben für $a = \infty$, nämlich $\frac{\pi}{2}$, leicht entdecken.

Da nun gerade die Anzahl derjenigen Differenzialformeln, welche bloß eine Integration durch Reihen gestatten, die überwiegendere ist, so sind wir genöthigt, uns nach anderen Wegen umzusehen, welche in jenen ausgezeichneten Fällen zu den spezielleren Werthen der Integrale führen. So entsteht die Theorie bestimmter Integrale, deren Grundzüge von Euler herrühren, und welche, durch die Entdeckungen von Lagrange, Laplace, Legendre, Fourier, Gauß u. A. bereichert, zu einem der wichtigsten und interessantesten Theile der höheren Analysis herangewachsen ist. Eine ganz besondere Bedeutung erlangte derselbe noch dadurch, daß man in ihm vortreffliche Mittel zur Summirung vieler unendlicher Reihen und zur Auflösung einer reichhaltigen Klasse von Differenzialgleichungen auffand.

Die Darstellung der in dieser Beziehung erfolgreichsten Theoreme und die Entwicklung von mehreren bestimmten Integralen allgemeiner Form ist der Zweck der vorliegenden Schrift, worin ich mir noch besonders die Aufgabe ge-

stellt habe, dem Calcul diejenige Genauigkeit und Sicherheit zu verleihen, durch welche sich die Betrachtungen von Cauchy und Lejeune Dirichlet so sehr auszeichnen. In wie weit mir dieß gelungen sei, und welchen Zuwachs das Gebiet der höheren Analysis durch die gegenwärtige Arbeit überhaupt gewonnen habe, mögen sachkundige Richter entscheiden.

Weimar, im Juni 1843.

Der Verfasser.

B e r i c h t i g u n g e n.

Seite 1 Zeile 10 v. u. l. Integrales statt Integrates.

- 5 - 7 - - - $1 \sin x$ - $1 \sin x$.

- 20 Formel (56) - $2\pi \geq z \geq 0$ statt $\pi \geq z \geq -\pi$.

- - - (57) - $\frac{\pi}{2} \geq z \geq 0$ - $\pi \geq z \geq -\pi$.

- - - (58) - $\frac{\pi}{2} \geq z \geq 0$ - $\pi \geq z \geq -\pi$.

- 24 - (72) - $e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}$ - $e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}$.

- 38 Zeile 14 v. o. - q für x .

- 56 Formel (83) fehlt z zwischen $\geq$ und $\geq$.

- 57 - (90) ist der Faktor $\cos x$ zu streichen.

- 64 - (108) und (109) l. $\pi > z > 0$ statt $\frac{\pi}{2} > z > 0$.

I. Die Theoreme von Lagrange und Fourier.

Die von Lagrange und Fourier entdeckten Sätze, nach denen man jede beliebige Funktion durch Reihen, welche nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten, oder durch ein doppeltes bestimmtes Integral ausdrücken kann, gehören zu den schönsten Eroberungen der höheren Analysis und finden in der Mechanik und Theorie der Wärme vielfache Anwendung. Indessen blieb doch die Beurtheilung der Convergenz jener Reihen und die Diskussion derselben für unstetige Funktionen lange mangelhaft, und erst Dirichlet war es, der die wahre Quelle jener Theoreme auffand und dieselben in der angedeuteten Beziehung vervollständigte. (Crelle's Journal für die reine u. angew. Mathem. Band 4, S. 157.) Eine Darstellung jener ganzen Theorie nach Dirichlet's Prinzipien ist auch in den Supplementen zum mathem. Wörterbuch, 1ste Abtheilung S. 239 zu finden. Indessen scheint es, daß dieselbe sich viel einfacher geben läßt, ohne der Strenge Eintrag zu thun, und dieses ist in den nachfolgenden §§. versucht worden.

§. 1.

Es giebt eine Menge von Reihen, deren allgemeines Glied man sich durch die Integration

$$\int f(x) \cos nx \, dx$$

zwischen beliebigen Gränzen entstanden denken kann. Dabei sei $f(x)$ eine beliebige Funktion, von welcher wir jedoch voraussetzen, daß sie während des Integrationsintervalles weder unendlich noch discontinuirlich werde, und n eine ganze positive Zahl, der Stellenzeiger. Für die Gränzen des Integrates wollen wir 0 und eine beliebige positive GröÙe a nehmen, weil sich andere Gränzen leicht auf diese zurückführen lassen. Setzen wir $n = 1, 2, 3, \dots$ bis n selbst, so sieht unsere Reihe so aus

$$\int_0^a f(x) \cos x \, dx + \int_0^a f(x) \cos 2x \, dx + \int_0^a f(x) \cos 3x \, dx + \dots + \int_0^a f(x) \cos nx \, dx \quad (1)$$

und wir wollen uns nun mit der Summirung derselben beschäftigen.

Zunächst bemerken wir, daß sich dieselbe wegen der Gleichheit der Integrationsgränzen und des gemeinschaftlichen Faktors $f(x) \, dx$ auch so schreiben läßt

$$\int_0^a f(x) \{ \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx \} \, dx \quad (2)$$

Die in der Klammer stehende Reihe ist leicht zu summiren; eine bekannte Formel sagt nämlich:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin (2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

wovon man sich sogleich überzeugt, wenn man durchgängig mit $2 \sin \frac{x}{2}$ multipliziert und auf der linken Seite jedes doppelte Produkt in eine Sinusdifferenz zerlegt. Wir haben demnach als Summe der Reihe (1) den Ausdruck:

$$-\frac{1}{2} \int_0^a f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} f(x) dx. \quad (5)$$

Kann man nun im besonderen Falle die hier angedeutete Integration ausführen, so ist dadurch die Summe der Reihe (1) dargestellt.

Besonders wichtig wird der Fall, in welchem n unendlich groß genommen wird, so daß die Reihe (1) eine unendliche ist. Daß die Glieder derselben immer kleiner werden, je weiter man sich vom Anfange entfernt, ist leicht einzusehen; man überzeugt sich nämlich durch theilweise Integration, bei welcher das Integral n zum Nenner bekommt, auf der Stelle davon. Ob aber jene Reihe auch eine endliche bestimmte Summe habe, wird davon abhängen, daß der Ausdruck (5) für $n = \infty$ einen bestimmten Werth annimmt, d. h. genauer gesprochen, daß sich derselbe für wachsende n einer festen Gränze nähert. In den Fällen, wo dieß statt findet, ist die Reihe (1) eine fallende und summirbare, d. i. eine convergirende.

Betrachten wir aber die Formel (5) genauer, so leuchtet auf der Stelle ein, daß sich schlechthin gar nicht bestimmen läßt, welcher Gränze sich dieselbe für wachsende n nähert, weil dort dieses n nur in $\sin(2n+1)\frac{x}{2}$ enthalten ist und der Sinus eines beständig wachsenden Bogens immer zwischen $+1$ und -1 oszillirt. Wir müssen daher versuchen jenes Integral auf eine andere Form zu bringen, in welcher sich der Uebergang zur Gränze für wachsende n mit Sicherheit bewerkstelligen läßt. Führen wir zunächst eine neue Veränderliche $\theta = \frac{x}{2}$ ein, so ist $dx = 2d\theta$ und wenn $x = 0$, $x = a$ geworden ist, hat θ die Werthe $\frac{0}{2}$ und $\frac{a}{2}$ angenommen; also wird jetzt unser Integral

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(2\theta) d\theta$$

und wenn wir überhaupt $f(\theta)$ für $f(2\theta)$ und c für $\frac{a}{2}$ schreiben, so nimmt es die folgende Form an

$$\int_0^c \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta. \quad (4)$$

§. 2.

Bevor wir an eine ganz allgemeine Lösung unseres Problems gehen, beschäftigen wir uns mit einem speziellen Falle, in welchem nämlich $a = \pi$, also die obere Gränze $c = \frac{\pi}{2}$ ist. Wir wollen in diesem Falle unser Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$$

kurz mit I_n bezeichnen. Führen wir eine neue Veränderliche $z = (2n + 1)\theta$ ein, so wird $\theta = \frac{z}{2n + 1}$, $d\theta = \frac{dz}{2n + 1}$ und wenn $\theta = 0$ und $= \frac{\pi}{2}$ geworden ist, hat z die Werthe 0 und $(2n + 1)\frac{\pi}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$ angenommen. Das fragliche Integral stellt sich jetzt unter folgende Form

$$I_n = \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin z}{(2n + 1) \sin \frac{z}{2n + 1}} f\left(\frac{z}{2n + 1}\right) dz \quad (5)$$

Das unter dem Integralzeichen mit dz multiplizierte wollen wir kurz mit $F(z)$ und $2n + 1$ mit m bezeichnen, so daß

$$F(z) = \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) \quad (6)$$

ist. Das Integral (5) zerlegen wir nun in eine Reihe anderer, welche sämmtlich nach dem gleichen Intervall $\frac{\pi}{2}$ fortschreiten; dies gibt folgende Integrale:

$$I_n = \left. \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(z) dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F(z) dz + \int_{\pi}^{(1 + \frac{1}{2})\pi} F(z) dz + \int_{(1 + \frac{1}{2})\pi}^{2\pi} F(z) dz + \dots \\ & \dots + \int_{(n - \frac{1}{2})\pi}^{n\pi} F(z) dz + \int_{n\pi}^{(n + \frac{1}{2})\pi} F(z) dz. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ein Paar auf einander folgende allgemeine Glieder aus dieser Reihe sind die nachstehenden, worin r den Index bezeichnet,

$$\begin{aligned} \int_{(r - \frac{1}{2})\pi}^{r\pi} F(z) dz &= \int_{(r - \frac{1}{2})\pi}^{r\pi} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz \\ \int_{r\pi}^{(r + \frac{1}{2})\pi} F(z) dz &= \int_{r\pi}^{(r + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz \end{aligned}$$

Dieselben lassen sich leicht auf die gleichen Grenzen 0 bis $\frac{\pi}{2}$ bringen. Man setze nämlich im ersten $z = r\pi - x$, im zweiten $z = r\pi + x$, wo x eine neue Veränderliche ist. Im ersten Integrale wird nun $\sin(r\pi - x) = -\cos r\pi \cdot \sin x$, $dz = -dx$ und wenn $z = (r - \frac{1}{2})\pi$ und $= r\pi$ geworden ist, hat x die Werthe $\frac{\pi}{2}$ und 0 angenommen. Im zweiten Integral wird $\sin(r\pi + x) = +\cos r\pi \cdot \sin x$, $dx = +dx$ und für $z = r\pi$ und $= (r + \frac{1}{2})\pi$ geht x in 0 und $\frac{\pi}{2}$ über. Jene beiden Integrale gestalten sich daher folgendermaßen

$$\cos r\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin x}{m \sin \frac{r\pi - x}{m}} f\left(\frac{r\pi - x}{m}\right) dx, \quad \cos r\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{m \sin \frac{r\pi + x}{m}} f\left(\frac{r\pi + x}{m}\right) dx.$$

Will man im ersten Integrale die Grenzen umkehren, um ihm genau die des zweiten zu verschaffen, so hat man es bloß negativ zu nehmen, und dann stellen sich beide Integrale unter die gemeinschaftliche Form

$$\pm \cos r\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{m \sin \frac{r\pi \pm x}{m}} f\left(\frac{r\pi \pm x}{m}\right) dx$$

wobei die unteren Zeichen für $\int_{(r-\frac{1}{2})\pi}^{r\pi} F(z) dz$, die oberen für $\int_{r\pi}^{(r+\frac{1}{2})\pi} F(z) dz$ gelten.

Substituieren wir dies in die Gleichung (7), indem wir $r = 0, 1, 2, \dots, n$ nehmen, so erhalten wir folgende Reihe:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} f\left(\frac{x}{m}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{m \sin \frac{\pi - x}{m}} f\left(\frac{\pi - x}{m}\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{m \sin \frac{\pi + x}{m}} f\left(\frac{\pi + x}{m}\right) dx - \dots + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{m \sin \frac{n\pi + x}{m}} f\left(\frac{n\pi + x}{m}\right) dx.$$

Das Gesetz, nach welchem die Vorzeichen wechseln, ist leicht zu übersehen. Es ist nämlich das erste Paar Integrale positiv, das zweite Paar negativ, das dritte positiv u. s. f. Da sämtliche Glieder unserer Reihe gleiche Integrationsgrößen besitzen, so kann man alle Integrale in eines zusammenziehen, nämlich:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{f\left(\frac{x}{m}\right)}{m \sin \frac{x}{m}} + \frac{f\left(\frac{\pi - x}{m}\right)}{m \sin \frac{\pi - x}{m}} - \frac{f\left(\frac{\pi + x}{m}\right)}{m \sin \frac{\pi + x}{m}} - \dots + (-1)^n \frac{f\left(\frac{n\pi + x}{m}\right)}{m \sin \frac{n\pi + x}{m}} \right\} \sin x dx. \quad (8)$$

Unter dieser Form hat es nun keine Schwierigkeit mehr, zur Gränze für wachsende n , d. h. wachsende m überzugehen. Da die Reihe unter dem Integralzeichen desto mehr Glieder besitzt, je größer n ist, so wird sie für ins Unendliche wachsende n eine unendliche werden. Wir haben nun noch die Gränze auszumitteln, der sich jedes einzelne Glied derselben für wachsende n nähert. Ein allgemeines Glied des Index r ist, abgesehen vom Vorzeichen

$$\frac{f\left(\frac{r\pi \pm x}{m}\right)}{m \sin \frac{r\pi \pm x}{m}}$$

was wir durch Zusetzung des Faktors $\frac{r\pi \pm x}{r\pi \pm x}$ auch so schreiben können:

$$\frac{1}{r\pi \pm x} \cdot \frac{r\pi \pm x}{m \sin \frac{r\pi \pm x}{m}} \cdot f\left(\frac{r\pi \pm x}{m}\right).$$

Da nun x innerhalb der Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bleibt und r seinen Werth nicht ändert, so ist die Gränze, welcher sich $\frac{r\pi + x}{m}$ für beständig wachsende m nähert, keine andere, als die Null. Wir haben daher

$$\lim \frac{\frac{r\pi + x}{m}}{\sin \frac{r\pi + x}{m}} = 1, \quad \lim f\left(\frac{r\pi + x}{m}\right) = f(0)$$

mithin für jenes allgemeine Glied

$$\lim \left[\frac{1}{r\pi + x} \cdot \frac{\frac{r\pi + x}{m}}{\sin \frac{r\pi + x}{m}} \cdot f\left(\frac{r\pi + x}{m}\right) \right] = \frac{1}{r\pi + x} f(0).$$

Führen wir diesen Werth für $r = 0, 1, 2, 3$ etc. in die Gleichung (8) ein und setzen die Constante $f(0)$ vor das Integralzeichen, so wird

$$\lim I_n = f(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \dots \right\} \sin x \, dx. \quad (9)$$

wobei die eingeklammerte Reihe eine unendliche ist.

Wir haben so die Bestimmung der Gränze, welcher sich das Integral I_n für wachsende n nähert, auf die Summirung einer unendlichen Reihe und eine Integration zurückgeführt. Ob jene Gränze eine bestimmte Gröfse sei oder nicht, entscheidet sich jetzt durch die Convergenz oder Divergenz der eingeklammerten Reihe, und im Falle der Convergenz noch dadurch, ob die Summe derselben, mit $\sin x \, dx$ multipliziert und zwischen den Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ integrirt, eine endliche Gröfse giebt oder nicht. Diefs Alles entscheidet sich leicht auf folgende Weise. Man nehme in der eingeklammerten Reihe

je zwei Glieder zusammen, so wird dieselbe

$$= \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{(2\pi)^2 - x^2} + \frac{2x}{(3\pi)^2 - x^2} - \dots \quad (10)$$

woraus man sogleich erkennt, dafs sie convergirt, wenn nicht $x = 0, \pi$ oder einem Vielfachen dieser Zahl ist. Unter dieser Voraussetzung findet sich leicht ihre Summe (nach Euler) auf folgende Weise. Man differenzire die bekannten Ausdrücke

$$1 \sin x = 1x + 1\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + 1\left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) + 1\left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}\right) + \dots$$

$$2 \cos \frac{1}{2} x = 2 \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + 2 \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}\right) + 2 \left(1 - \frac{x^2}{5^2 \pi^2}\right) + \dots$$

so erhält man:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{2^2 \pi^2 - x^2} - \frac{2x}{3^2 \pi^2 - x^2} - \dots$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{4x}{\pi^2 - x^2} + \frac{4x}{3^2 \pi^2 - x^2} + \frac{4x}{5^2 \pi^2 - x^2} + \dots$$

Addirt man beide Reihen mit der Bemerkung, dafs $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$, folglich

$\cot x + \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x}$ ist, so erscheint die Gleichung

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{(2\pi)^2 - x^2} + \frac{2x}{(3\pi)^2 - x^2} - \dots \quad (11)$$

Für $x = 0$ werden beide Seiten der Gleichung unendlich, aber auf die nämliche Weise; denn für abnehmende δ ergibt sich aus derselben

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta}$$

was in der That ganz richtig ist. Also gilt obige Formel auch für $x = 0$. Die rechte Seite derselben ist aber die zu summirende Reihe (10) und gleich der unter dem Integralzeichen in (9) eingeklammerten; mithin giebt die Multiplikation mit $\sin x$

$$1 = \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \dots \right\} \sin x \quad (12)$$

und dies gilt für alle Werthe, welche x in dem Integrationsintervalle 0 bis $\frac{\pi}{2}$ (Formel (9)) annehmen kann. Wir haben daher

$$\lim I_n = f(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = f(0) \cdot \frac{\pi}{2}$$

und wenn wir uns an die Bedeutung von I_n erinnern,

$$\lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} f(0). \quad (13)$$

§. 5.

Wir wollen jetzt allgemeiner untersuchen, welchem Gränzwerthe sich das Integral

$$I_n = \int_0^c \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta \quad (14)$$

worin c eine von $\frac{\pi}{2}$ verschiedene Gröfse bezeichnet, für wachsende n nähert.

A. Es sei erstlich die obere Integrationsgränze $c < \frac{\pi}{2}$, aber natürlich von Null verschieden, weil sonst das Integral verschwinden würde. Durch Einführung einer neuen Veränderlichen $z = (2n+1)\theta$ geht es in das folgende über:

$$I_n = \int_0^{(2n+1)c} \frac{\sin z}{(2n+1) \sin \frac{z}{2n+1}} f\left(\frac{z}{2n+1}\right) dz$$

worin wir wie früher $2n+1 = m$ setzen wollen. Da nun $c < \frac{\pi}{2}$, so ist $mc < m\frac{\pi}{2}$, und wir können $mc = h\frac{\pi}{2} + b$ setzen, worin h eine ganze Zahl $< m$ und b eine Gröfse bedeutet, welche > 0 und $< \frac{\pi}{2}$ ist. Zerlegen wir jenes Integral nach der oberen Gränze, so giebt dasselbe

$$I_n = \int_0^{\frac{h\pi}{2}} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz + \int_{\frac{h\pi}{2}}^{\frac{h\pi}{2} + b} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz. \quad (15)$$

Auf das erste dieser Integrale sind genau die nämlichen Transformationen anwendbar, die wir früher mit dem Integral (6) vorgenommen haben. Man zerlegt dasselbe in eine Reihe wie die in (7) und leitet daraus eine der in (8) ganz ähnliche ab. Der Unterschied zwischen jener und der aus dem obigen Integrale entspringenden besteht darin, daß die letztere um einige Glieder kürzer ausfällt, weil hier die obere Gränze $\frac{h\pi}{2}$ kleiner als die dortige $m\frac{\pi}{2}$ ist. Da aber h mit m gleichzeitig ins Unendliche wächst, so fällt dann unsere Reihe ganz mit der schon betrachteten (9) zusammen; und es ist

$$\lim \int_0^{\frac{h\pi}{2}} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} dz = \lim \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \frac{\sin z}{m \sin \frac{z}{m}} f\left(\frac{z}{m}\right) dz = \frac{\pi}{2} f(0). \quad (16)$$

Wir haben nun noch das zweite Integral in (15) zu betrachten.

Setzen wir darin $z = \frac{h\pi}{2} + x$, wobei x eine neue Veränderliche bedeutet; so geht dasselbe in

$$\int_0^b \frac{\sin\left(\frac{h\pi}{2} + x\right)}{m \sin\left(\frac{h}{m} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{x}{m}\right)} f\left(\frac{h}{m} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{x}{m}\right) dx$$

über. Da nun x zwischen den Gränzen 0 und b ($\frac{\pi}{2} > b > 0$) liegt, so nähert sich $\frac{x}{m}$ der Null; weil ferner h und m ganze Zahlen sind, die gleichzeitig wachsen und $h < m$ ist, so nähert sich der Bruch $\frac{h}{m}$ irgend einer gewissen endlichen Gränze α , die wir nicht weiter untersuchen wollen. Führen wir das Bisherige ein, so wird jenes Integral

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{f\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)}{\sin \alpha \frac{\pi}{2}} \int_0^b \sin\left(\frac{h\pi}{2} + x\right) dx$$

worin wir noch m wachsen lassen müssen. Da nun α jedenfalls > 0 und nicht größer als die Einheit sein kann, so nähert sich dieser Ausdruck für wachsende m unbegrenzt der Null. Benutzen wir dieses Resultat und das in (16) gefundene, so erhalten wir aus der Gleichung (15)

$$\lim I_n = \frac{\pi}{2} f(0)$$

oder, wenn wir uns an die Bedeutung von I_n erinnern,

$$\lim \int_0^c \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} f(0), \quad \frac{\pi}{2} > c > 0. \quad (17)$$

B. Wir nehmen ferner an, daß die obere Gränze $c > \frac{\pi}{2}$, aber $< \pi$ sei. Wir können dann $c = \pi - b$ setzen, wobei b eine zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende GröÙe sein muß. Wir haben jetzt durch Zerlegung nach der oberen Gränze

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^c \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta - \int_{\pi-b}^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta \end{aligned} \right\} c = \pi - b,$$

und wenn wir in den beiden letzten Integralen $\theta = \pi - \theta'$ setzen, so ergibt sich leicht auf der rechten Seite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta'}{\sin \theta'} f(\pi - \theta') d\theta' - \int_0^b \frac{\sin(2n+1)\theta'}{\sin \theta'} f(\pi - \theta') d\theta'. \quad (18)$$

Nach den Formeln (14) und (17) ist es jetzt sehr leicht, die Werthe zu finden, welchen sich diese Integrale für wachsende n nähern; dieselben sind, vorausgesetzt daß $\frac{\pi}{2} > b > 0$ ist,

$$+ \frac{\pi}{2} f(0), \quad + \frac{\pi}{2} f(\pi), \quad - \frac{\pi}{2} f(\pi)$$

mithin haben wir

$$\lim \int_0^c \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} f(0), \quad \pi > c > \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Fassen wir zusammen, was in (14), (17) und (19) gefunden wurde, so ist

$$\lim \int_0^c \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} f(0), \quad \pi > c > 0. \quad (20)$$

C. Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem $c = \pi$ oder einem Vielfachen dieser Zahl gleich ist. Für $c = \pi$ ist die in (18) vorkommende GröÙe $b = 0$, und das letzte jener Integrale zwischen gleichen Gränzen enthalten, also $= 0$. Es bleibt daher noch übrig

$$\lim \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \{f(0) + f(\pi)\}. \quad (21)$$

Ist die obere Gränze c einem Vielfachen von π gleich, also etwa $= r\pi$, wobei r eine positive ganze Zahl bedeutet, so zerlege man das Integral

$$\int_0^{r\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$$

in eine Reihe anderer, welche nach dem Intervalle π fortschreiten, also auf folgende Weise:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \dots + \int_{(r-1)\pi}^{r\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta$$

und setze im 1sten, 2ten, 3ten rten Integrale $\theta = \theta', \pi + \theta', 2\pi + \theta' \dots (r-1)\pi + \theta'$, so erhält man

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta'}{\sin \theta'} f(\theta') d\theta' + \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta'}{\sin \theta'} f(\pi + \theta') d\theta' + \dots + \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta'}{\sin \theta'} f(r-1\pi + \theta') d\theta'$$

und es läßt sich jetzt vermöge der Gleichung (21) die Gränze bestimmen, welcher sich jedes dieser Integrale für wachsende n nähert. Es ist nämlich

$$\lim \int_0^{r\pi} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + \frac{1}{2} f(r\pi) \right\}. \quad (22)$$

D. Wir können nun den allgemeinsten Fall behandeln, wenn c irgend eine beliebige Gröfse bedeutet. Dieselbe kann man immer unter die Form $r\pi + b$ bringen, wobei r eine positive ganze Zahl und $\pi > b > 0$ ist. Wir haben dann

$$\int_0^{r\pi+b} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{r\pi} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta + \int_{r\pi}^{r\pi+b} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta. \quad (23)$$

Mit dem ersten dieser Integrale haben wir uns schon in C. beschäftigt; es bleibt also die Betrachtung des zweiten übrig. Man setze darin $\theta = r\pi + \theta'$, so geht dasselbe über in

$$\int_0^b \frac{\sin (2n+1)\theta'}{\sin \theta'} f(r\pi + \theta') d\theta', \quad \pi > b > 0.$$

Dasselbe nähert sich nach Formel (20) dem Ausdrucke $\frac{\pi}{2} f(r\pi)$, und daher haben wir aus (22) und (23)

$$\lim \int_0^{r\pi+b} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + f(r\pi) \right\}, \quad \pi > b > 0. \quad (24)$$

Wir haben jetzt unser Problem vollständig gelöst und sind dadurch zu dem fruchtbaren Satze gelangt, daß die ins Unendliche verlängerte Reihe (1) im §. 1. jederzeit convergirt, so lange nur die Funktion $f(x)$ während des Integrationsintervalles 0 bis a endlich und stetig bleibt und die obere Gränze a nicht unendlich groß ist, und daß sich die Summe jener Reihe in jedem Falle mittelst der Formeln (22) und (24) leicht ausmitteln läßt.

§. 4.

Bevor wir weiteren Untersuchungen über diesen Gegenstand Raum geben, wollen wir ein Paar einfache Beispiele von der Anwendung der gefundenen Formeln betrachten.

In der Reihe (1) nehmen wir $f(x) = 1$, also constant, und haben dann

$$\int_0^a f(x) \cos nx \, dx = \frac{\sin na}{n}$$

und nach den Formeln (1) und (5)

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sin a}{1} + \frac{\sin 2a}{2} + \frac{\sin 3a}{3} + \dots + \frac{\sin na}{n} \\ &= -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\sin (2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Wollen wir die Reihe ins Unendliche fortsetzen, so haben wir auf der linken Seite die Gränze zu nehmen; welcher sich das Integral für wachsende n nähert. Für $x = 2\theta$ nimmt dasselbe die Form an:

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta \quad (26)$$

und es kommt jetzt auf die GröÙe von a an, welche von den bisher entwickelten Formeln anzuwenden ist.

Liegt a zwischen 2π und 0 , mithin $\frac{a}{2}$ zwischen π und 0 , so haben wir nach Formel (20),

$$\lim \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{\pi}{2},$$

mithin

$$\frac{\pi - a}{2} = \frac{\sin a}{1} + \frac{\sin 2a}{2} + \frac{\sin 3a}{3} + \dots \text{in inf.}; \quad 2\pi > a > 0. \quad (27)$$

Für $a = 0$ dagegen hat in (25) das Integral gleiche Gränzen und daher den Werth 0 , ebenso ist $-\frac{1}{2}a = 0$, folglich die Summe der Reihe $= 0$, wie es auch sein muß.

Für $a = 2\pi$, also $\frac{a}{2} = \pi$ muß man die Formel (21) auf das Integral (26) anwenden. Man erhält als Summe der Reihe

$$-\frac{1}{2} \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} (1 + 1) = 0$$

wie es auch in der Form der Reihe selbst liegt.

Ebenso leicht würde es sein, für noch andere a die Summe jener Reihe vermöge der Formeln (22) und (24) zu bestimmen, wobei wir uns nicht aufhalten wollen.

Zugleich ergibt sich aus dem Bisherigen, daß man die Reihe (27) nicht schlechthin nach a differenzieren darf. Denn man muß sich erinnern, daß nach (25) allgemein für jedes a ,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sin a}{1} + \frac{\sin 2a}{2} + \frac{\sin 3a}{3} + \dots \text{in inf.} \\ & = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \lim \int_0^a \frac{\sin (2n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ist. Differenziert man dies nach a , so hat man

$$\begin{aligned} & \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots \text{in inf.} \\ & = -\frac{1}{2} + \lim \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin (2n+1)\frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \end{aligned}$$

was immer richtig ist, wenn auch diese Lim. nicht bestimmt angegeben werden kann. Wollte man dagegen in (28) gleich die Lim. jenes Integrales hinsetzen, so enthält dieselbe kein a und daher würde bei der Differenziation nach a das Resultat

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots \text{in inf.} = -\frac{1}{2}$$

zum Vorschein kommen, welches ganz falsch ist.

Ein anderes Beispiel von der Anwendbarkeit der Formeln (22) und (24) sei folgendes.

Man lasse zuvörderst in denselben r ins Unendliche wachsen, so gehen beide Formeln in die folgende über:

$$\lim \int_0^\infty \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \dots \text{in inf.} \right\} \quad (29)$$

und es wird im besonderen Falle die Convergenz oder Divergenz der unendlichen Reihe das Kriterium sein, ob jene Lim. eine endliche bestimmte GröÙe ist oder nicht.

Man nehme z. E. folgendes Integral

$$\int_e^{-kx} \cos hx \, dx = -\frac{k \sin hx + h \cos hx}{k^2 + h^2} \cdot e^{-kx} + \text{const} \quad (30)$$

setze darin $x = \infty$, $x = 0$ und subtrahire beide Werthe, so wird

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos hx \, dx = \frac{k}{k^2 + h^2} \quad (30)^*$$

eine Formel, welche für jedes reelle, essentiell positive h und k gilt.

Ferner sei $k = a$, h successive $= 1, 2, 3 \dots n$, so giebt die Summe aller Glieder

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a}{a^2 + 1^2} + \frac{a}{a^2 + 2^2} + \frac{a}{a^2 + 3^2} + \dots + \frac{a}{a^2 + n^2} \\ & = \int_0^a e^{-ax} \{ \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx \} \, dx \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

oder, wenn wir die Reihe kurz mit einem Summenzeichen zusammenfassen nach Formel (1)

$$\sum_{n=1}^n \frac{a}{a^2 + n^2} = -\frac{1}{2} \int_0^a e^{-ax} \, dx + \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\sin (2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} e^{-ax} \, dx.$$

Führen wir das erste Integral aus und setzen im zweiten $x = 2\theta$, so wird noch

$$\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^n \frac{a}{a^2 + n^2} = \int_0^\infty \frac{\sin (2n+1) \theta}{\sin \theta} e^{-2a\theta} \, d\theta.$$

Lassen wir n ins Unendliche wachsen, so haben wir auf der linken Seite eine unendliche Reihe und rechts geht das Integral zur Gränze für wachsende n über; also

$$\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^\infty \frac{a}{a^2 + n^2} = \lim \int_0^\infty \frac{\sin (2n+1) \theta}{\sin \theta} e^{-2a\theta} \, d\theta$$

d. i. nach Formel (29)

$$\begin{aligned} & = \pi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{e^{-2a\pi}}{e} + \frac{e^{-4a\pi}}{e^2} + \frac{e^{-6a\pi}}{e^3} + \dots \text{in inf.} \right\} \\ & = \pi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{e^{-2a\pi}}{1 - e^{-2a\pi}} \right\} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 + e^{-2a\pi}}{1 - e^{-2a\pi}} \end{aligned}$$

oder endlich, wenn wir Zähler und Nenner mit $e^{+a\pi}$ multiplizieren,

$$\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^\infty \frac{a}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} \quad (32)$$

Wir wollen uns indessen bei diesen Beispielen, deren Zahl sich leicht sehr vermehren lieÙe, nicht weiter aufhalten, da wir später ein allgemeineres Theorem über diesen Gegenstand zu erwarten haben.

§. 5.

Es hat jetzt auch keine Schwierigkeit, die Gränzen zu bestimmen, welchen sich die Integrale

$$\int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} f(\theta) d\theta \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi+b} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} f(\theta) d\theta, \quad \pi > b > 0,$$

in welchen wieder r eine positive ganze Zahl bedeutet, für wachsende n nähern.

Setzt man nämlich in dem ersten derselben $\theta = \frac{\pi}{2} + x$, so geht dasselbe, abgesehen vom Vorzeichen, in das folgende über:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx,$$

welches wir in zwei andere zerlegen, nämlich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} f\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx.$$

Setzen wir im ersten $x = \theta$, im zweiten $x = -\theta$ und kehren dann in demselben die Integrationsgrößen um, so haben wir

$$\int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} f\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} f\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta.$$

Bestimmen wir nach den Formeln (22) und (14) die Grenzen, welchen sich diese Integrale für wachsende n nähern, so findet sich

$$\lim \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + f\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \dots + \frac{1}{2} f\left(\frac{2r+1}{2}\pi\right) \right\}. \quad (33)$$

Ferner ist

$$\int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi+b} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} f(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} f(\theta) d\theta + \int_{\frac{2r+1}{2}\pi}^{\frac{2r+1}{2}\pi+b} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} f(\theta) d\theta$$

oder, wenn wir im zweiten Integrale $\theta = \frac{2r+1}{2}\pi + \theta'$ setzen,

$$= \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} f(\theta) d\theta + \int_0^b \frac{\sin(2n+1)\theta'}{\sin\theta'} f\left(\frac{2r+1}{2}\pi + \theta'\right) d\theta'.$$

Bestimmen wir nach den Formeln (33) und (20) ($\pi > b > 0$) die Grenzen, welchen sich diese Integrale für wachsende n nähern, so erhalten wir

$$\lim \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi+b} \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + f\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \dots + f\left(\frac{2r+1}{2}\pi\right) \right\}, \quad \pi > b > 0. \quad (34)$$

Lassen wir endlich noch r ins Unendliche wachsen, so ist noch

$$\lim \int_0^\infty \frac{\cos (2n+1)\theta}{\cos \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + f\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \dots \text{in inf.} \right\} \quad (35)$$

und es wird hier im besonderen Falle von der Convergenz oder Divergenz dieser unendlichen Reihe abhängen, ob jene Lim. eine endliche bestimmte Gröfse hat oder nicht.

Die Formeln (33), (34), (35) sind die Analoga der (22), (24), (29) und auf ähnliche Weise anwendbar, wie wir an einem Beispiele zeigen wollen.

§. 6.

In der bekannten Formel

$$\int_0^\infty e^{-kx} \sin hx \, dx = \frac{k \sin hx + h \cos hx}{h^2 + k^2} e^{-kx} + \text{const} \quad (36)$$

setze man $x = \infty$, $x = 0$ und subtrahire beide Werthe, so ist

$$\int_0^\infty e^{-kx} \sin hx \, dx = \frac{h}{h^2 + k^2}. \quad (36)^*$$

Man nehme hier $k \text{ constant} = a$, $h = 1, 3, 5, \dots (2n+1)$ und summire sämtliche Glieder mit wechselnden Zeichen, so wird

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-ax} \left\{ \sin x - \sin 3x + \sin 5x - \dots + \sin (2n+1)x \right\} dx \\ &= \frac{1}{a^2 + 1^2} - \frac{3}{a^2 + 3^2} + \frac{5}{a^2 + 5^2} - \dots + \frac{2n+1}{a^2 + (2n+1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Reihe ist aber

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin (2n+2)x}{\cos x} = \frac{1}{2} \left[\sin (2n+1)x + \frac{\cos (2n+1)x}{\cos x} \cdot \sin x \right]$$

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man mit $2 \cos x$ multipliziert und links jedes doppelte Produkt in eine Sinussumme zerlegt. Mithin ist auch

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin (2n+1)x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos (2n+1)x}{\cos x} e^{-ax} \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{a^2 + 1^2} - \frac{3}{a^2 + 3^2} + \frac{5}{a^2 + 5^2} - \dots + \frac{2n+1}{a^2 + (2n+1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Wollen wir die Reihe auf der rechten Seite ins Unendliche fortsetzen, so müssen wir auf der linken Seite zur Gränze für wachsende n übergehen. Das erste Integral läfst sich nach (36)* ausführen und giebt

$$\frac{2n+1}{a^2 + (2n+1)^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{2n+1} + (2n+1)}$$

woraus erhellt, daß dasselbe für wachsende n gegen die Gränze 0 convergirt. Für das zweite Integral können wir uns der Formel (35) bedienen, wenn wir dort $\theta = x$ und $f(\theta) = e^{-ax} \sin x$ setzen; es wird dann

$$\lim \int_0^\infty \frac{\cos (2n+1)x}{\cos x} e^{-ax} \sin x \, dx = \pi \left\{ e^{-\frac{a}{2}} \sin \frac{\pi}{2} + e^{-\frac{3a}{2}} \sin \frac{3\pi}{2} + e^{-\frac{5a}{2}} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \text{in inf.} \right\}$$

oder weil $\sin \frac{\pi}{2} = +1$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, etc. ist, auch

$$= \pi e^{-\frac{a\pi}{2}} \left\{ 1 - e^{-a\pi} + e^{-2a\pi} - e^{-3a\pi} + \dots \right\}$$

$$= \pi e^{-\frac{a\pi}{2}} \cdot \frac{1}{1 + e^{-a\pi}} = \frac{\pi}{e^{\frac{a\pi}{2}} + e^{-\frac{a\pi}{2}}}$$

Wir haben mithin aus (58),

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{a\pi}{2}} + e^{-\frac{a\pi}{2}}} = \frac{1}{a^2 + 1^2} - \frac{3}{a^2 + 3^2} + \frac{5}{a^2 + 5^2} - \dots \quad (59)$$

§. 7.

Das Bisherige enthält die vollständige Lösung der Aufgabe, die Summe der unendlichen Reihe zu finden, deren allgemeines ntes Glied das Integral

$$\int_0^a f(x) \cos nx \, dx,$$

ist, wie wir dies im §. 1. festgestellt hatten. Wir wollen jetzt eine ähnliche Aufgabe behandeln, nämlich die, eine Reihe zu summieren, deren allgemeines Glied das Integral

$$\int_0^\pi f(x) \cos n(x - \alpha) \, dx$$

ist, wobei α eine beliebige positive oder negative Constante bedeutet.

Die fragliche Reihe ist also folgende, wenn wir dieselbe vorerst bis zum nten Gliede nehmen:

$$\int_0^\pi f(x) \cos(x - \alpha) \, dx + \int_0^\pi f(x) \cos 2(x - \alpha) \, dx + \int_0^\pi f(x) \cos 3(x - \alpha) \, dx + \dots + \int_0^\pi f(x) \cos n(x - \alpha) \, dx,$$

wofür wir kürzer

$$\sum_{n=1}^n \int_0^\pi f(x) \cos n(x - \alpha) \, dx$$

schreiben wollen. Dieselbe ist auch

$$= \int_0^\pi f(x) \left\{ \cos(x - \alpha) + \cos 2(x - \alpha) + \cos 3(x - \alpha) + \dots + \cos n(x - \alpha) \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\pi f(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1) \frac{x-\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} f(x) \, dx,$$

wobei die schon mehrmals gebrauchte Summenformel angewendet worden ist. Wir haben also auch

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1) \frac{x-\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} f(x) \, dx = \int_0^\pi f(x) \, dx + 2 \sum_{n=1}^n \int_0^\pi f(x) \cos n(x - \alpha) \, dx$$

und wenn wir zur Gränze für wachsende n übergehen,

$$\lim \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1) \frac{x-\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} f(x) \, dx = \int_0^\pi f(x) \, dx + 2 \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi f(x) \cos n(x - \alpha) \, dx. \quad (40)$$

Um auf der linken Seite die gesuchte Limes zu bestimmen, müssen wir zuvörderst das Integral auf die früher betrachtete Form zurückführen. Für $x - \alpha = 2\theta$ wird dasselbe

$$= 2 \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\alpha+2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\alpha+2\theta) d\theta - 2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\alpha+2\theta) d\theta. \quad (41)$$

Für ein positives α nehmen wir im zweiten Integrale θ negativ und haben so

$$2 \int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\alpha+2\theta) d\theta + 2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(\alpha-2\theta) d\theta. \quad (42)$$

Wollen wir auf diese Integrale die Formeln (20) und (21) anwenden, so müssen wir dem α einige Beschränkungen auferlegen:

- 1) Es liege α zwischen 0 und π , dann ist gleichzeitig $\pi > \frac{\pi-\alpha}{2} > 0$ und $\pi > \frac{\alpha}{2} > 0$, folglich beide Integrale unter der Form des Ausdrucks (20) enthalten, wo $\pi > c > 0$ war. Gehen wir daher zu den Grenzen für wachsende n über, so erhalten wir nach (20) für dieselben:

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} f(\alpha) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} f(\alpha) = 2\pi f(\alpha).$$

- 2) Für $\alpha = 0$ hat das zweite Integral gleiche Grenzen 0 und 0, mithin verschwindet es, und das erste Integral giebt nach Formel (14):

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} f(0) = \pi f(0).$$

- 3) Für $\alpha = \pi$ verschwindet das erste Integral und das zweite giebt nach (14):

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} f(\pi) = \pi f(\pi).$$

Durch diese 3 Ausdrücke ist die Summe der Reihe (40) für $\pi \geq \alpha \geq 0$ bestimmt.

Für ein negatives α geht die Formel (40) in die folgende über:

$$\lim \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x+\alpha}{2}} = \int_0^{\pi} f(x) dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} f(x) \cos n(x+\alpha) dx. \quad (43)$$

Für $\frac{x+\alpha}{2} = 0$ wird das Integral auf der linken Seite:

$$= 2 \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(-\alpha+2\theta) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi+\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(-\alpha+2\theta) d\theta - 2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} f(-\alpha+2\theta) d\theta. \quad (44)$$

- 1) Liegt wieder der absolute Werth von α zwischen 0 und π , so ist gleichzeitig $\pi > \frac{\pi+\alpha}{2} > 0$ und $\pi > \frac{\alpha}{2} > 0$, folglich beide Integrale in dem Falle der Formel (20). Wir erhalten daher als Gränzwerthe derselben für wachsende n :

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} f(-\alpha) - 2 \cdot \frac{\pi}{2} f(-\alpha) = 0.$$

- 2) Für $\alpha = 0$ verschwindet das zweite Integral und das erste giebt nach (14)

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} f(0) = \pi f(0).$$

5) Für $\alpha = \pi$ wird $\frac{\pi + \alpha}{2} = \pi$ und $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$, mithin ist das erste Integral nach (21), das zweite nach (14) ausführbar; man erhält:

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} \{f(-\pi) + f(-\pi + 2\pi)\} - 2 \cdot \frac{\pi}{2} f(-\pi) = \pi f(\pi).$$

Man addire jetzt die beiden Formeln (40) und (43); es ist dann das allgemeine Glied

$$\int_0^\pi f(x) \{ \cos n(x - \alpha) + \cos n(x + \alpha) \} dx = 2 \cos n\alpha \int_0^\pi f(x) \cos nx dx$$

und daher steht auf der rechten Seite die Reihe

$$2 \int_0^\pi f(x) dx + 4 \sum_1^\infty \cos n\alpha \int_0^\pi f(x) \cos nx dx.$$

Die Summe derselben ist für $\pi > \alpha > 0$: $= 2\pi f(\alpha) + 0$, für $\alpha = 0$: $= \pi f(0) + \pi f(0)$, für $\alpha = \pi$: $= \pi f(\pi) + \pi f(\pi)$, d. h. überhaupt $2\pi f(\alpha)$, wobei α auch noch $= 0$ und $= \pi$ sein darf. Wir haben daher die Gleichung:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx + \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \cos n\alpha \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad \pi \geq \alpha \geq 0. \quad (45)$$

Setzen wir kurz

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = a_n, \quad (46)$$

schreiben für α eine beliebige Veränderliche z , und lösen das Summenzeichen auf, so ist nun

$$f(z) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + a_3 \cos 3z + \dots, \quad \pi \geq z \geq 0 \quad (47)$$

d. h. es läßt sich jede Funktion von z in eine unendliche Reihe verwandeln, welche nach den Cosinus der Vielfachen von z fortschreitet; die Coefficienten dieser Cosinus bestimmen sich aus der Formel (46) und die Reihe selbst ist so lange der Funktion $f(z)$ identisch, als die Veränderliche z die Grenzen 0 und π nicht überschreitet.

Ein ähnliches Resultat ergibt sich durch Subtraction der Formel (45) von (40). Das allgemeine Glied der Reihe auf der rechten Seite ist

$$\int_0^\pi \{ \cos n(x - \alpha) - \cos n(x + \alpha) \} f(x) dx = 2 \sin n\alpha \int_0^\pi f(x) \sin nx dx$$

und daher steht daselbst die Reihe

$$4 \sum_1^\infty \sin n\alpha \int_0^\pi f(x) \sin nx dx.$$

Die Summe derselben ist für $\pi > \alpha > 0$,

$$2\pi f(\alpha) - 0 = 2\pi f(\alpha).$$

für $\alpha = 0$,

$$\pi f(0) - \pi f(0) = 0.$$

für $\alpha = \pi$,

$$\pi f(\pi) - \pi f(\pi) = 0,$$

mithin haben wir die Gleichung

$$f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \sin n\alpha \int_0^\pi f(x) \sin nx dx, \quad \pi > \alpha > 0. \quad (48)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = b_n, \quad (49)$$

schreiben z für α und lösen das Summenzeichen auf, so ist nun

$$f(z) = b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + b_3 \sin 3z + \dots, \quad \pi > z > 0 \quad (50)$$

d. h. Es läßt sich jede Funktion von z in eine Reihe verwandeln, welche nach den Sinus der Vielfachen von z fortschreitet; die Coefficienten dieser Sinus bestimmen sich nach der Formel (49) und die Reihe ist so lange der Funktion $f(z)$ identisch, als die Veränderliche z innerhalb der Gränzen 0 und π bleibt, ohne dieselben erreichen zu dürfen.

Für $z = 0$ oder $z = \pi$ dagegen steht auf der linken Seite jedesmal die Null, wie dieß auch wegen der Form der Reihe auf der rechten Seite sein muß, die sich jedesmal annullirt, sobald $z = 0$ oder einem Vielfachen von π gleich wird.

Wollte man in den Formeln (47) und (50) z über die Gränzen 0 und π ausdehnen, so würde allgemein gar keine Identität mehr statt finden. Denn die Summe der Reihe (47) (abgesehen von der linken Seite) ist eine Funktion von z , welche ganz ähnliche Eigenschaften hat, wie der Cosinus, d. h. wenn wir sie mit $\varphi(z)$ bezeichnen, so ist $\varphi(-z) = \varphi(+z)$, $\varphi(\pi + z) = -\varphi(z)$ etc. Hat also $f(z)$ nicht zufälligerweise die nämlichen Eigenschaften, so kann außerhalb des Intervalles 0 bis π keine Identität zwischen $f(z)$ und $\varphi(z)$ statt finden. Ganz ähnlich verhält es sich mit der Reihe (50), deren Eigenschaften denen des Sinus analog sind.

Wir wollen endlich noch einen Fall betrachten, nämlich den, in welchem die Funktion $f(z)$ für einen zwischen 0 und π liegenden Werth von z unstetig wird. Es sei dieß der Fall für $z = \alpha$. Dann gehören zu diesem Werthe von z zwei verschiedene Werthe von $f(z)$; denn da sich $f(z)$ an der Stelle α sprungweis ändert, so kann man $f(\alpha)$ ebensowohl als den letzten Werth der Reihe $\dots f(\alpha - 3\delta)$, $f(\alpha - 2\delta)$, $f(\alpha - \delta)$, (wo δ eine sehr kleine Gröfse ist) betrachten, als auch für den Anfangswerth der neuen Reihe $f(\alpha + \delta)$, $f(\alpha + 2\delta)$, $f(\alpha + 3\delta) \dots$ ansehen. Diese beiden Werthe von $f(\alpha)$ wollen wir durch $f(\alpha - 0)$ und $f(\alpha + 0)$ unterscheiden, so daß also offenbar

$$\lim f(\alpha - \delta) = f(\alpha - 0), \quad \lim f(\alpha + \delta) = f(\alpha + 0)$$

ist. Betrachten wir nun den Ausdruck (42), welcher für wachsende n sich der Summe der Reihe (40) nähert, so geht jetzt derselbe zu der Gränze über:

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} f(\alpha + 0) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} f(\alpha - 0),$$

so daß wir also statt $f(\alpha)$ zu schreiben haben $\frac{1}{2} [f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)]$. Führen wir diesen Werth in die weitere Rechnung ein, so ergibt sich auf der Stelle, daß die Summen der Reihen

$$\frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + a_3 \cos 3z + \dots$$

$$b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + b_3 \sin 3z + \dots$$

worin a_n und b_n die oben festgestellte Bedeutung haben für irgend einen Werth α von z , welcher zwischen 0 und π liegt und für welchen $f(z)$ unstetig wird, nicht mehr wie früher $f(\alpha)$, sondern das arithmetische Mittel aus den beiden Werthen $f(\alpha + 0)$ und $f(\alpha - 0)$ sind.

Wir können also in jedem Falle die Summen der Reihen (47) und (50) ausmitteln, und dieselben sind, vorausgesetzt daß $f(z)$ in dem Intervalle 0 bis π nicht unendlich wird, jederzeit endlich bestimmte Gröfsen; da diese Reihen unter der gemachten Voraussetzung auch immer fallende sind, so folgt, daß dieselben jederzeit convergiren.

§. 3.

Wir wollen uns jetzt mit einigen Beispielen für die Formeln (47) und (50) beschäftigen.

1) Für die Reihe

$$f(z) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + a_3 \cos 3z + \dots, \quad \pi \geq z \geq 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$$

sei erstlich $f(z) = z$; man hat

$$\int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$\int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2},$$

d. h. $= 0$, wenn n gerade und $= -\frac{2}{n^2}$, wenn n ungerade ist; folglich

$$a_n = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2}, \text{ wo } n \text{ bloß ungerade sein darf.}$$

Die Formel gilt aber nicht für $n = 0$; man hat dann unmittelbar

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi.$$

Folglich ist nun

$$z = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\cos z}{1^2} + \frac{\cos 3z}{3^2} + \frac{\cos 5z}{5^2} + \dots \right\}, \quad \pi \geq z \geq 0. \quad (51)$$

Für $z = 0$ und $z = \pi$ erhält man das bekannte Resultat:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Für $z = \frac{\pi}{2}$ wird die Gleichung identisch $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

2) Man nehme $f(z) = \cos \mu z$, wo μ einen beliebigen Bruch bedeuten soll. Es ist dann

$$\int_0^\pi \cos \mu x \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos (n + \mu) x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos (n - \mu) x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin (n + \mu) x}{n + \mu} + \frac{\sin (n - \mu) x}{n - \mu} \right\}$$

$$\int_0^\pi \cos \mu x \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin (n + \mu) \pi}{n + \mu} + \frac{\sin (n - \mu) \pi}{n - \mu} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cos n\pi \sin \mu\pi \left\{ \frac{1}{n + \mu} - \frac{1}{n - \mu} \right\}$$

oder weil $\cos n\pi = (-1)^n$ ist, wenn man Alles auf gemeinschaftlichen Nenner bringt,

$$a_n = \frac{2\mu}{\pi} \sin \mu\pi \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \mu^2}.$$

Also haben wir

$$\cos \mu z = \frac{1}{\mu\pi} \sin \mu\pi + \frac{2\mu}{\pi} \sin \mu\pi \left\{ \frac{\cos z}{1^2 - \mu^2} - \frac{\cos 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{\cos 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots \right\}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos \mu z}{\sin \mu\pi} = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mu \cos z}{1^2 - \mu^2} - \frac{\mu \cos 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{\mu \cos 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots, \quad \pi \geq z \geq 0. \quad (52)$$

Für $z = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ giebt diese Formel die bekannten Ausdrücke für $\operatorname{cosec} \mu\pi$, $\sec \frac{1}{2} \mu\pi$ und $\cot \mu\pi$. Sie gilt aber auch für negative z (deren absolute Werthe π nicht übersteigen), weil die linke Seite die Eigenschaft $f(-z) = f(+z)$ hat.

3) Man setze $f(z) = z \sin z$, so ist

$$\int x \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int x \sin (n+1)x \, dx - \frac{1}{2} \int x \sin (n-1)x \, dx.$$

Für jedes ganze positive m folgt aus

$$\int x \sin mx \, dx = -\frac{x \cos mx}{m} + \frac{\sin mx}{m^2}$$

das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi x \sin mx \, dx = -\frac{\pi \cos m\pi}{m} = \frac{\pi}{m} (-1)^{m+1}, \quad (53)$$

folglich

$$\int_0^\pi x \sin x \cos nx \, dx = \frac{\pi}{2} \left(\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n-1} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)}$$

und

$$a_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)}$$

Die Formel ist aber unbrauchbar für $n = 0$ und $n = 1$, im ersten Falle erhält man, unmittelbar nach (53):

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin x \, dx = 2,$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2},$$

und folglich

$$z \sin z = 1 - \frac{\cos z}{2} - \frac{2 \cos 2z}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cos 3z}{2 \cdot 4} - \dots$$

oder

$$\frac{z}{2} \sin z = \frac{1}{2} - \frac{\cos z}{4} - \frac{\cos 2z}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 3z}{2 \cdot 4} - \frac{\cos 4z}{3 \cdot 5} + \dots, \quad \pi \geq z \geq 0. \quad (54)$$

Für $z = 0, z = \pi$ erhält man ein Paar bekannte algebraische Reihen; für $z = \frac{\pi}{2}$ die Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \dots = \frac{1}{2} + \frac{4}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots$$

die sich leicht in die Leibnitzesche Reihe auflösen läßt.

Die Formel (54) gilt übrigens auch für negative z , weil die linke Seite die Eigenschaft $f(-z) = f(+z)$ besitzt.

4) Man setze $f(z) = e^{+az} + e^{-az}$.

Nun ist

$$\int e^{\alpha x} \cos nx \, dx = \frac{n \sin nx + \alpha \cos nx}{\alpha^2 + n^2} e^{\alpha x},$$

folglich

$$\int_0^\pi e^{\alpha x} \cos nx \, dx = \frac{\alpha \left(e^{\alpha \pi} \cos n\pi - 1 \right)}{\alpha^2 + n^2},$$

woraus sich ergibt

$$\int_0^\pi \left(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x} \right) \cos nx \, dx = \frac{\alpha \left(e^{\alpha \pi} + e^{-\alpha \pi} \right)}{\alpha^2 + n^2} \cos n\pi$$

und

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha(-1)^n \left(e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi} \right)}{\alpha^2 + n^2},$$

folglich

$$e^{\alpha z} + e^{-\alpha z} = \frac{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha \cos z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{2\alpha \cos 2z}{\alpha^2 + 2^2} - \frac{2\alpha \cos 3z}{\alpha^2 + 3^2} + \dots \right\}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha \cos z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{\alpha \cos 2z}{\alpha^2 + 2^2} - \frac{\alpha \cos 3z}{\alpha^2 + 3^2} + \dots, \quad +\pi \geq z \geq 0. \quad (55)$$

Die Formel gilt auch für negative z , weil die linke Seite die Eigenschaft $f(-z) = f(+z)$ besitzt.

Schreibt man $\pi - z$ für z , so wird

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha(\pi-z)} + e^{-\alpha(\pi-z)}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha \cos z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{\alpha \cos 2z}{\alpha^2 + 2^2} + \dots, \quad +\pi \geq z \geq -\pi, \quad (56)$$

woraus man u. A. für $z = 0$ die spezielle Formel (32) findet.

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (55) und (56) erhält man mit leichter Umformung:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\alpha(\frac{\pi}{2}-z)} + e^{-\alpha(\frac{\pi}{2}-z)}}{e^{\frac{\alpha \pi}{2}} - e^{-\frac{\alpha \pi}{2}}} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha \cos 2z}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{\alpha \cos 4z}{\alpha^2 + 4^2} + \dots, \quad \pi \geq z \geq -\pi, \quad (57)$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\alpha(\frac{\pi}{2}-z)} - e^{-\alpha(\frac{\pi}{2}-z)}}{e^{\frac{\alpha \pi}{2}} + e^{-\frac{\alpha \pi}{2}}} = \frac{\alpha \cos z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{\alpha \cos 3z}{\alpha^2 + 3^2} + \dots, \quad \pi \geq z \geq -\pi, \quad (58)$$

Formeln, die man wieder auf verschiedene Weise spezialisieren könnte, wobei ich mich nicht aufhalten will.

§. 9.

Man kann aus den eben entwickelten Reihen durch Integration nach z noch andere ableiten, welche natürlich ebenfalls bloß für das Intervall 0 bis π Gültigkeit besitzen. Gibt man der Integration gleich die Grenzen 0 und π , so erhält man leicht Reihen, deren Glieder die Produkte aus den entsprechenden Gliedern anderer sind.

Man multipliziere z. B. die Gleichung (52) mit $\frac{2}{\pi} z \sin z \, dz$ und integriere zwischen den Grenzen 0 und π , so ist

$$\frac{1}{\sin \mu \pi} \int_0^\pi z \cos \mu z \sin z \, dz = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi z \sin z \, dz + \frac{\mu}{1^2 - \mu^2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi z \cos z \sin z \, dz - \frac{\mu}{2^2 - \mu^2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi z \cos 2z \sin z \, dz + \dots$$

Die Integrale auf der rechten Seite sind nichts anderes als die mit $a_0, a_1, a_2 \dots a_n \dots$ bezeichneten Coeffizienten im 3ten Beispiele des vorigen Paragraphen, und es ist also

$$\frac{1}{\sin \mu \pi} \int_0^\pi z \cos \mu z \sin z \, dz = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{1^2 - \mu^2} + \frac{2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{\mu}{2^2 - \mu^2} + \frac{2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\mu}{3^2 - \mu^2} + \dots \quad (59)$$

Die Integration auf der linken Seite ist leicht auszuführen, nämlich

$$\begin{aligned} \int z \cos \mu z \sin z \, dz &= \frac{1}{2} \int z \sin (1 + \mu) z \, dz + \frac{1}{2} \int z \sin (1 - \mu) z \, dz \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{z \cos (1 + \mu) z}{1 + \mu} + \frac{\sin (1 + \mu) z}{(1 + \mu)^2} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{z \cos (1 - \mu) z}{1 - \mu} + \frac{\sin (1 - \mu) z}{(1 - \mu)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi z \cos \mu z \sin z \, dz = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{\cos (1 + \mu) \pi}{1 + \mu} + \frac{\cos (1 - \mu) \pi}{1 - \mu} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (1 + \mu) \pi}{(1 + \mu)^2} + \frac{\sin (1 - \mu) \pi}{(1 - \mu)^2} \right],$$

woraus sich nach gehöriger Reduktion findet:

$$\int_0^\pi \cos \mu z \sin z \, dz = \pi \cos \mu \pi \frac{1}{1^2 - \mu^2} + \sin \mu \pi \cdot \frac{2\mu}{(1^2 - \mu^2)^2}.$$

Substituiert man dies in die Gleichung (59) und dividirt mit 2 beiderseits, so ergiebt sich

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cot \mu \pi}{1^2 - \mu^2} + \frac{\mu}{(1^2 - \mu^2)^2} = \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu}{1^2 - \mu^2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{\mu}{2^2 - \mu^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\mu}{3^2 - \mu^2} + \dots \quad (60)$$

eine Reihe, deren einzelne Glieder die Produkte aus den Coeffizienten der entsprechenden Glieder in den Reihen (52) und (54) sind.

Multipliziert man ebenso die Reihe (55) mit $\frac{2}{\pi} z \sin z \, dz$ und integrirt zwischen 0 und π , so erhält man

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha \pi} + e^{-\alpha \pi}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} - \frac{\alpha}{(1^2 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{1^2 + \alpha^2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{\alpha}{2^2 + \alpha^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\alpha}{3^2 + \alpha^2} - \dots \quad (61)$$

die man auch aus (60) ableiten kann, wenn man $\mu = \alpha \sqrt{-1}$ setzt.

§. 10.

Wir wollen uns jetzt mit Beispielen für die Reihe (50), nämlich

$$f(z) = b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + b_3 \sin 3z + \dots, \quad \pi > z > 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$$

beschäftigen.

1) Man setze zunächst $f(z)$ constant = 1, so ist

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos n\pi}{n},$$

d. h. = 0, wenn n gerade und $= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$, wenn n ungerade ist. Also wird nun

$$1 = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\sin z}{1} + \frac{\sin 3z}{3} + \frac{\sin 5z}{5} + \dots \right\}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin z}{1} + \frac{\sin 3z}{3} + \frac{\sin 5z}{5} + \dots, \quad \pi > z > 0. \quad (62)$$

Für $z = \frac{\pi}{2}$, welches die Bedingung $\pi > z > 0$ erfüllt, ergiebt sich die bekannte Leibnitzsche Reihe.

2) Man nehme ferner $f(z) = z$, so ist

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \pi \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \text{ nach (53)}$$

mithin

$$z = 2 \left\{ \frac{\sin z}{1} - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \frac{\sin 4z}{4} + \dots \right\}$$

oder

$$\frac{z}{2} = \frac{\sin z}{1} - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \frac{\sin 4z}{4} + \dots, \quad \pi > z > 0. \quad (63)$$

Die Reihe gilt auch noch für $z = 0$ und negative z , deren absoluter Werth $< \pi$ ist, weil die linke Seite die zufällige Eigenschaft $f(0) = 0$, $f(-z) = -f(z)$ besitzt. Schreibt man $\pi - z$ für z , so hat man

$$\frac{\pi - z}{2} = \frac{\sin z}{1} + \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} + \frac{\sin 4z}{4} + \dots, \quad \pi > z > 0 \quad (64)$$

ungültig für $z = 0$ und negative z aber zufällig für $z = \pi$ gültig.

3) Es sei $f(z) = \sin \mu z$, wo μ einen beliebigen Bruch bedeutet. Es ist

$$\begin{aligned} \int \sin \mu x \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int \cos (n - \mu) x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos (n + \mu) x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin (n - \mu) x}{n - \mu} - \frac{\sin (n + \mu) x}{n + \mu} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin \mu x \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin (n - \mu) \pi}{n - \mu} - \frac{\sin (n + \mu) \pi}{n + \mu} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \cos n\pi \sin \mu\pi \left\{ \frac{1}{n - \mu} + \frac{1}{n + \mu} \right\} \end{aligned}$$

oder weil $\cos n\pi = (-1)^n$ ist, wenn man alles auf gleichen Nenner bringt und mit $\frac{2}{\pi}$ multipliziert,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \sin \mu\pi \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \mu^2},$$

folglich

$$\sin \mu z = \frac{2}{\pi} \sin \mu\pi \left\{ \frac{\sin z}{1^2 - \mu^2} - \frac{2 \sin 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{3 \sin 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots \right\}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \mu z}{\sin \mu\pi} = \frac{\sin z}{1^2 - \mu^2} - \frac{2 \sin 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{3 \sin 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots, \quad \pi > z > 0. \quad (65)$$

Die Formel gilt auch noch für negative z (natürlich ausgenommen $z = -\pi$), weil die linke Seite die Eigenschaft $f(-z) = -f(z)$ besitzt.

4) Für $f(z) = z \cos z$ ist

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos x \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x \sin (n + 1) x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi x \sin (n - 1) x \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{(-1)^{n+2}}{n + 1} + \frac{(-1)^n}{n - 1} \right\} \text{ nach (53)} \end{aligned}$$

oder wenn man auf gleichen Nenner bringt und mit $\frac{2}{\pi}$ multipliziert,

$$b_n = \frac{2(-1)^n \cdot n}{(n-1)(n+1)},$$

Der Fall $n = 1$ macht eine Ausnahme; dann ist

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}.$$

Wir haben so

$$z \cos z = -\frac{\sin z}{z} + \frac{2 \cdot z \sin 2z}{1 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 3 \sin 3z}{2 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 4 \sin 4z}{3 \cdot 5} - \dots$$

oder

$$\frac{z}{2} \cos z = -\frac{\sin z}{4} + \frac{2 \sin 2z}{1 \cdot 3} - \frac{3 \sin 3z}{2 \cdot 4} + \frac{4 \sin 4z}{3 \cdot 5} - \dots, \quad \pi > z > 0. \quad (66)$$

Die Formel gilt auch noch für $z = 0$ und negative z (excl. $z = -\pi$), weil $f(0) = 0$, $f(-z) = -f(z)$ ist.

Addiert man die Reihen (63) und (66), so ergibt sich

$$\frac{z}{2} (1 + \cos z) = \frac{3}{4} \sin z + \frac{\sin 2z}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\sin 3z}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\sin 4z}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots, \quad \pi > z > 0, \quad (67)$$

ebenfalls noch gültig für $z = 0$ und negative z . Nimmt man $z = \frac{\pi}{2}$, so erscheint die Reihe

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots, \quad (68)$$

die sich auch aus der Leibnitzschen Reihe für $\frac{\pi}{4}$ ableiten läßt.

5) Wir nehmen $f(z) = e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}$.

Es ist

$$\int_0^{\alpha x} e^{\sin nx} \, dx = \frac{\alpha \sin nx - n \cos nx}{\alpha^2 + n^2} e^{\alpha x}$$

$$\int_0^{\pi} e^{\sin nx} \, dx = \frac{n(1 - e^{\alpha \pi} \cos n\pi)}{\alpha^2 + n^2}$$

folglich

$$\int_0^{\pi} (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) \sin nx \, dx = \frac{-n}{\alpha^2 + n^2} (e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}) \cos n\pi$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n(-1)^{n+1}}{\alpha^2 + n^2} \left(e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi} \right).$$

Daraus folgt

$$e^{\alpha z} - e^{-\alpha z} = \frac{2}{\pi} (e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}) \left\{ \frac{\sin z}{\alpha^2 + 1^2} - \frac{2 \sin 2z}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3z}{\alpha^2 + 3^2} - \dots \right\}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} = \frac{\sin z}{\alpha^2 + 1^2} - \frac{2 \sin 2z}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3z}{\alpha^2 + 3^2} - \dots, \quad \pi > z > 0. \quad (69)$$

Die Formel ist übrigens auch für $z = 0$ und negative z richtig, weil die linke Seite die Eigenschaften $f(0) = 0$, $f(-z) = -f(z)$ besitzt.

Schreibt man $\pi - z$ für z , so erhält man

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha(\pi-z)} - e^{-\alpha(\pi-z)}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} = \frac{\sin z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{2 \sin 2z}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3z}{\alpha^2 + 3^2} + \dots, \quad \pi > z > 0, \quad (70)$$

welche noch für $z = \pi$, aber nicht für negative z Gültigkeit besitzt.

Durch Addition und Subtraktion der Formeln (69) und (70) ergeben sich leicht noch die folgenden:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha(\frac{\pi}{2}-z)}{2}} - e^{-\frac{\alpha(\frac{\pi}{2}-z)}{2}}}{e^{\frac{\alpha\pi}{2}} - e^{-\frac{\alpha\pi}{2}}} = \frac{2 \sin 2z}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{4 \sin 4z}{\alpha^2 + 4^2} + \frac{6 \sin 6z}{\alpha^2 + 6^2} + \dots, \quad \pi > z > 0, \quad (71)$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha(\frac{\pi}{2}-z)}{2}} + e^{-\frac{\alpha(\frac{\pi}{2}-z)}{2}}}{e^{\frac{\alpha\pi}{2}} - e^{-\frac{\alpha\pi}{2}}} = \frac{\sin z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{3 \sin 3z}{\alpha^2 + 3^2} + \frac{5 \sin 5z}{\alpha^2 + 5^2} + \dots, \quad \pi > z > 0, \quad (72)$$

von welchen die letztere für $z = \frac{\pi}{2}$ in die speziellere Formel (59) übergeht.

§. 11.

Wir wollen nun in der allgemeinen Untersuchung fortfahren. Schreiben wir in den Formeln (45) und (48) x für α und um Verwechslung zu verhüten, unter den Integralzeichen θ für x , so haben wir

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \cos nx \int_0^\pi f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad \pi \geq x \geq 0, \quad (73)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \sin nx \int_0^\pi f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad \pi > x > 0. \quad (74)$$

Um jetzt die Grenzen für x , innerhalb welcher diese Gleichungen identisch sind, zu erweitern, setzen wir $\frac{\pi x}{c}$ für x , $\frac{\pi \theta}{c}$ für θ , wobei c eine beliebige aber nothwendig positive Gröfse ist. Statt der Funktionen $f\left(\frac{\pi x}{c}\right)$, $f\left(\frac{\pi \theta}{c}\right)$ wollen wir $\varphi(x)$, $\varphi(\theta)$ schreiben, wobei die Funktion φ ebenso willkürlich ist, als das frühere f . Für das neue x haben wir jetzt die Grenzen $\pi \geq \frac{\pi x}{c} \geq 0$ und $\pi > \frac{\pi x}{c} > 0$ oder $c \geq x \geq 0$ und $c > x > 0$, so dafs also die neuen Gleichungen

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi \theta}{c}} \varphi(\theta) d\left(\frac{\pi \theta}{c}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \cos \frac{n\pi}{c} x \int_0^{\frac{\pi \theta}{c}} \varphi(\theta) \cos \frac{n\pi}{c} \theta d\left(\frac{\pi \theta}{c}\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \sin \frac{n\pi}{c} x \int_0^{\frac{\pi \theta}{c}} \varphi(\theta) \sin \frac{n\pi}{c} \theta d\left(\frac{\pi \theta}{c}\right)$$

von $x = 0$ bis $x = c$ gelten. Die Integrationsgrößen für θ sind noch nicht angegeben, weil sie sich geändert haben. Die früheren Grenzen π und 0 bezogen sich auf das frühere θ ; jetzt haben wir $\frac{\pi \theta}{c}$ für θ gesetzt, also sind sie nun $\frac{\pi \theta}{c} = \pi$ und $\frac{\pi \theta}{c} = 0$, d. h. $\theta = c$, $\theta = 0$. Wir haben also

$$\varphi(x) = \frac{1}{c} \int_0^c \varphi(\theta) d\theta + \frac{2}{c} \sum_1^\infty \cos \frac{n\pi}{c} x \int_0^c \varphi(\theta) \cos \frac{n\pi}{c} \theta d\theta, \quad c \geq x \geq 0, \quad (75)$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{c} \sum_1^\infty \sin \frac{n\pi}{c} x \int_0^c \varphi(\theta) \sin \frac{n\pi}{c} \theta d\theta, \quad c > x > 0. \quad (76)$$

Für diese Formeln gelten ganz ähnliche Bemerkungen, wie für die ihnen analogen (45) und (48) oder (47) und 50). Sie sind beide vollkommen richtig, sobald sich x innerhalb der Grenzen 0 und c befindet; die erste gilt auch noch für $x = 0$ und $x = c$, während die zweite in jedem dieser Fälle die Summe

0 gibt. Vermöge dieser Eigenschaften wird sie in der Mechanik wichtig und wurde für dieselbe zuerst von Lagrange entwickelt.

Diese Formeln gestatten eine sehr elegante Anwendung auf die Theorie der bestimmten Integrale überhaupt, wenn man nämlich die Gränze c ins Unendliche ausdehnt. Man bemerke für diesen Zweck, daß sich die erste Formel durch beiderseitige Addition von

$$\frac{1}{c} \int_0^c \varphi(\theta) d\theta$$

auch so schreiben läßt:

$$\varphi(x) + \frac{1}{c} \int_0^c \varphi(\theta) d\theta = \frac{2}{c} \sum_0^\infty \cos \frac{n\pi}{c} x \int_0^c \varphi(\theta) \cos \frac{n\pi}{c} \theta d\theta \quad (77)$$

und daß man, weil $\sin \frac{0\pi}{c} x = 0$ ist, für die zweite setzen kann

$$\varphi(x) = \frac{2}{c} \sum_0^\infty \sin \frac{n\pi}{c} x \int_0^c \varphi(\theta) \sin \frac{n\pi}{c} \theta d\theta. \quad (78)$$

Es fragt sich nun, was aus diesen Formeln werden wird, wenn c ins Unendliche wächst. Die Integrationsgränzen 0 und c gehen dann in 0 und ∞ über, zu gleicher Zeit wird jedes einzelne Glied unendlich klein; da aber ihrer eine unendliche Anzahl vorhanden ist, so kann die Summe derselben immer eine endliche Gröfse sein.

In der That giebt es folgenden Satz: wenn $\psi(\omega)$ eine beliebige Funktion der Veränderlichen ω ist, so findet die Gleichung statt:

$$\int_0^\infty \psi(\omega) d\omega = \text{Lim. } \delta \left\{ \psi(0) + \psi(\delta) + \psi(2\delta) + \dots \right\},$$

wobei δ eine ins Unendliche abnehmende Gröfse bedeutet und die Reihe so weit fortgesetzt wird, daß einmal die Produkte, $2\delta, 3\delta, \dots$ unendlich groß werden. Wir können diese Gleichung auch mittelst eines Summenzeichens kürzer schreiben, nämlich

$$\int_0^\infty \psi(\omega) d\omega = \text{Lim. } \delta \sum_0^\infty \psi(n\delta). \quad (79)$$

Nun lassen sich aber die Gleichungen (77), (78) durch Zusetzung des Faktors $\frac{\pi}{c}$ auch so darstellen:

$$\varphi(x) + \frac{1}{c} \int_0^c \varphi(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{c} \sum_0^\infty \cos n \frac{\pi}{c} x \int_0^c \varphi(\theta) \cos n \frac{\pi}{c} \theta d\theta, \quad c \geq x \geq 0$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{c} \sum_0^\infty \sin n \frac{\pi}{c} x \int_0^c \varphi(\theta) \sin n \frac{\pi}{c} \theta d\theta, \quad c > x > 0.$$

Wächst nun c ins Unendliche, so wird $\frac{\pi}{c}$ eine unendlich abnehmende Gröfse δ , und wenn wir dann

$$\cos \delta x \int_0^\infty \varphi(\theta) \cos \delta \theta d\theta = \psi_1(\delta)$$

$$\sin \delta x \int_0^\infty \varphi(\theta) \sin \delta \theta d\theta = \psi_2(\delta)$$

setzen, so sind die Summen jener Reihen

$$\varphi(x) + \text{Lim. } \frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \text{Lim. } \delta \sum_0^\infty \psi_1(n\delta)$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \text{Lim. } \delta \sum_0^\infty \psi_2(n\delta),$$

d. h. weil $\text{Lim. } \frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\theta) d\theta = 0$ ist, nach der Formel (79),

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_1(\omega) d\omega$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi_2(\omega) d\omega$$

und wenn wir die Werthe von $\psi_1(\omega)$ und $\psi_2(\omega)$ denen für $\psi_1(\theta)$ und $\psi_2(\theta)$ gemäß einsetzen,

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos x\omega d\omega \int_0^{\infty} \varphi(\theta) \cos \omega\theta d\theta, \quad \infty \geq x \geq 0, \quad (80)$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin x\omega d\omega \int_0^{\infty} \varphi(\theta) \sin \omega\theta d\theta, \quad \infty > x > 0, \quad (81)$$

welches die von Fourier gefundenen Resultate sind.

Es bleibt hier x constant für beide Integrationen; zuerst wird nach θ integrirt und dabei ω als Constante betrachtet; nach Einführung der Gränzen 0 und ∞ hat man bloß noch eine Funktion von x und ω ; diese wird nach ω integrirt und ω auf die Gränzen 0 und ∞ ausgedehnt, so daß eine bloße Funktion von x übrig bleibt, welches die gegebene Funktion $\varphi(x)$ ist.

Man kann aber noch einige andere Formeln aufstellen, von denen (75), (76), (80) und (81) nur spezielle Fälle sind.

§. 12.

Zuerst ist wieder in Erinnerung zu bringen, daß die Formeln (73) und (74) für negative x nur dann gelten, wenn in der ersten $f(x)$ die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ und in der zweiten die: $f(-x) = f(x)$ besitzt; die erste Formel gilt auch noch für $x = 0$, die zweite aber nur dann, wenn $f(0) = 0$ ist. Allen diesen Bedingungen kann man ganz allgemein Genüge leisten, wenn man in der ersten $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ und in der zweiten $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ für $f(x)$ setzt. Die erste dieser Funktionen bleibt nämlich für negative x die nämliche, die zweite ändert für negative x ihr Vorzeichen, aber nicht ihren Werth und annullirt sich für $x = 0$.

Der Coefficient von $\cos nx$ wird nun

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(\theta) + f(-\theta)}{2} \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(-\theta) \cos n\theta d\theta.$$

Nimmt man im zweiten Integrale $-\theta$ für θ , so wird dasselbe

$$= - \int_0^{-\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta = \int_{-\pi}^0 f(\theta) \cos n\theta d\theta,$$

folglich jener Coefficient

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(\theta) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta.$$

Ebenso leicht findet man

$$\int_0^{\pi} \frac{f(\theta) - f(-\theta)}{2} \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Wir erhalten nun

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \cos nx \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad +\pi > x > -\pi \quad (82)$$

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad +\pi > x > -\pi \quad (83)$$

und durch Addition beider

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \cos nx \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad +\pi > x > -\pi. \quad (84)$$

Man kann auch hier die Grenzen, für welche x gilt und die zugleich die Integrationsgrenzen für θ sind, ausdehnen, indem man wie früher $\frac{\pi x}{c}, \frac{\pi \theta}{c}$ für x, θ und $\varphi(x), \varphi(\theta)$ für $f(\frac{\pi x}{c}), f(\frac{\pi \theta}{c})$ setzt. Man erhält ganz analog

$$\varphi(x) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \varphi(\theta) d\theta + \frac{1}{c} \sum_1^{\infty} \cos \frac{n\pi}{c} x \int_{-c}^c \varphi(\theta) \cos \frac{n\pi}{c} \theta d\theta + \frac{1}{c} \sum_1^{\infty} \sin \frac{n\pi}{c} x \int_{-c}^c \varphi(\theta) \sin \frac{n\pi}{c} \theta d\theta, \quad +c > x > -c. \quad (85)$$

Man kann auch den Formeln (84) und (85) eine elegantere Gestalt geben, wenn man die für die Integrationen constanten $\cos nx$ und $\sin nx$ unter die Integralzeichen setzt und beide Summen vereinigt; man hat so aus (84):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos nx \cos n\theta + \sin nx \sin n\theta \} f(\theta) d\theta$$

oder

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n(\theta - x) d\theta, \quad +\pi > x > -\pi. \quad (86)$$

Die Anwendung des nämlichen Verfahrens auf die Formel (85) giebt

$$\varphi(x) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \varphi(\theta) d\theta + \frac{1}{c} \sum_1^{\infty} \int_{-c}^c \varphi(\theta) \cos \frac{n\pi}{c} (\theta - x) d\theta, \quad +c > x > -c. \quad (87)$$

Diese Reihen kann man noch einfacher darstellen. Denn es läßt sich (86) auch so schreiben:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n(\theta - x) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \sum_{+1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n(\theta - x) d\theta,$$

weil das erste Glied dadurch, daß man $n = -1, -2, \dots, -\infty$ setzt, das nämliche giebt, als hätte man $n = +1, +2, \dots, +\infty$ genommen, so daß also in dem vorliegenden Ausdrücke die erste Summe

der letzten gleich ist, woraus sogleich wieder die Formel (86) hervorgeht. Bemerkt man aber, daß das mittelste Glied dem Werthe $n = 0$ entspricht, so erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n(\theta - x) d\theta, \quad +\pi > x > -\pi, \quad (88)$$

und durch ein gleiches Verfahren aus (87):

$$\varphi(x) = \frac{1}{2c} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-c}^c \varphi(\theta) \cos \frac{n\pi}{c} (\theta - x) d\theta, \quad +c > x > -c. \quad (89)$$

Wir wollen nun auch hier die beliebige GröÙe c ins Unendliche wachsen lassen. Schreiben wir die Formel folgendermaßen:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{c} \int_{-c}^c \cos \frac{n\pi}{c} (\theta - x) d\theta,$$

setzen $\frac{\pi}{c} = \delta$, und

$$\int_{-c}^c \cos \delta (\theta - x) d\theta = \psi(\delta),$$

so ist jetzt für ins Unendliche wachsende c also unendlich abnehmende δ ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta \psi(n\delta).$$

Ferner haben wir, mit ω einen beliebigen Integrationsbuchstaben bezeichnend,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) d\omega = \text{Lim. } \delta \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi(n\delta),$$

folglich nach dem obigen

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdot \psi(\omega)$$

oder, wenn wir den Werth von $\psi(\omega)$ dem von $\psi(\delta)$ gemäß einsetzen,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta) \cos \omega (\theta - x) d\theta, \quad \infty > x > -\infty. \quad (90)$$

Es ist hier wieder x constant für beide Integrationen; die erste derselben geschieht in Bezug auf θ , indem man ω als constant ansieht. Durch Einführung der Gränzen ∞ und $-\infty$ für θ fällt dieses heraus; die übrig bleibende bloß von x und ω abhängige Funktion wird mit $d\omega$ multipliziert und zwischen den Gränzen $\omega = \infty$ und $\omega = -\infty$ integrirt, so daß das Uebrige eine bloße Funktion von x und gleich $\varphi(x)$ ist.

Die beiden Formeln (80) und (81) sind spezielle Fälle der obigen. Wenn man nämlich $\cos \omega(\theta - x)$ auflöst und dann festsetzt, daß das Integral, abgesehen von dem auf der linken Seite stehenden $\varphi(x)$, die Eigenschaft haben solle, für negative x das Nämliche wie für positive x , oder das Entgegengesetzte zu geben, so erhält man für diese beiden Fälle

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \cos x\omega \cos \omega\theta d\theta$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\omega \cos \omega\theta d\theta,$$

die man leicht auf die Formeln (80) und (81) reduziert. Natürlich kann nun für negative x keine Identität mehr statt finden, wenn nicht etwa $\varphi(x)$ gerade auch jene Eigenschaften besitzt, die man von den Integralen verlangt hatte, also wenn im ersten Falle $\varphi(-x) = \varphi(x)$, im zweiten $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ wäre.

§. 13.

Die so eben abgeleiteten Formeln (80), (81) und (90) lassen sich auch *a posteriori* bestätigen; diese Betrachtungsweise bietet zugleich den Vortheil, daß sie sich verallgemeinern läßt und dann zu Integralen führt, von welchen die vorigen nur spezielle Fälle sind.

Bevor wir dies unternehmen, müssen wir einige leichte Folgerungen aus den Gleichungen (22) und (24) ziehen. Setzen wir daselbst $f(\theta) = \varphi(\theta) \frac{\sin \theta}{\theta}$, so ist

$$\lim \int_0^{r\pi} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta = \pi \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 0}{0} \varphi(0) + \frac{\sin \pi}{\pi} \varphi(\pi) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin r\pi}{r\pi} \varphi(r\pi) \right\}$$

$$\lim \int_0^{r\pi+b} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta = \pi \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 0}{0} \varphi(0) + \frac{\sin \pi}{\pi} \varphi(\pi) + \dots + \frac{\sin r\pi}{r\pi} \varphi(r\pi) \right\}.$$

Nun ist aber $\lim \frac{\sin \delta}{\delta} = 1$ oder $\frac{\sin 0}{0} = 1$, $\sin \pi = \sin 2\pi \dots = \sin r\pi = 0$ und folglich

$$\lim \int_0^{r\pi} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta = \lim \int_0^{r\pi+b} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \varphi(0)$$

und da r beliebig gewählt werden darf, mithin $r\pi + b$ alle möglichen Werthe > 0 annehmen kann, so hat man überhaupt für jede beliebige obere Integrationsgränze $a > 0$,

$$\lim \int_0^a \frac{\sin (2n+1)\theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \varphi(0), \quad a > 0. \quad (91)$$

Daraus folgt sogleich, wenn b eine andere beliebige Gröfse > 0 ist,

$$\lim \int_b^a \frac{\sin (2n+1)\theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta = 0, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (92)$$

Wir betrachten jetzt folgendes bestimmte Integral:

$$\int_0^{2n+1} \cos x\omega d\omega \int_0^a \varphi(\theta) \cos \omega\theta d\theta. \quad (93)$$

Um den Werth desselben aufzufinden, erinnern wir an den bekannten Satz, daß es in einem doppelten Integrale zwischen bestimmten Gränzen gleichgültig ist, in welcher Ordnung man die beiden Integrationen verrichtet.

Kehren wir daher in dem vorliegenden Doppelintegrale die Aufeinanderfolge der Integrationen um und integrieren zuerst nach ω , so wird dasselbe

$$= \int_0^a \varphi(\theta) d\theta \int_0^{2n+1} \cos x\omega \cos \theta\omega d\omega$$

und durch Zerlegung des Cosinusproduktes in eine Cosinussumme:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^\alpha \varphi(\theta) d\theta \int_0^{2n+1} \cos(\theta+x) \omega d\omega + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \varphi(\theta) d\theta \int_0^{2n+1} \cos(\theta-x) \omega d\omega \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\alpha \varphi(\theta) d\theta \cdot \frac{\sin(2n+1)(\theta+x)}{\theta+x} + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \varphi(\theta) d\theta \cdot \frac{\sin(2n+1)(\theta-x)}{\theta-x}
\end{aligned}$$

Im ersten Integrale setzen wir $\theta+x=\theta'$, also $\theta=\theta'-x$, im zweiten $\theta-x=\theta'$, also $\theta=x+\theta'$, so erhalten wir die Integrale in folgender Form:

$$\frac{1}{2} \int_x^{\alpha+x} \frac{\sin(2n+1)\theta'}{\theta'} \varphi(\theta'-x) d\theta' + \frac{1}{2} \int_{-x}^{\alpha-x} \frac{\sin(2n+1)\theta'}{\theta'} \varphi(x+\theta') d\theta'.$$

Gehen wir jetzt zur Gränze für wachsende n über, so ist aus (93) und der vorliegenden Formel, in der wir θ für θ' schreiben wollen,

$$\left. \begin{aligned}
&\int_0^\infty \cos x\omega d\omega \int_0^\alpha \varphi(\theta) \cos \omega\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim \int_x^{\alpha+x} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta} \varphi(\theta-x) d\theta + \frac{1}{2} \lim \int_{-x}^{\alpha-x} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta} \varphi(x+\theta) d\theta.
\end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Ist nun x eine positive Gröfse, so nähert sich nach dem Satze (92) das erste Integral der Null; das zweite ist aber

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\alpha-x} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta} \varphi(x+\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{-x}^0 \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta} \varphi(x+\theta) d\theta.$$

Nehmen wir in dem zweiten dieser Integrale θ negativ, so wird dasselbe

$$= -\frac{1}{2} \int_{+x}^0 \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta} \varphi(x-\theta) d\theta = +\frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta} \varphi(x-\theta) d\theta.$$

Wir haben also, immer unter der Voraussetzung, dafs α und x positive, von Null verschiedene Gröfsen sind:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \cos x\omega d\omega \int_0^\alpha \varphi(\theta) \cos \omega\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} \lim \int_0^{\alpha-x} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta} \varphi(x+\theta) d\theta + \frac{1}{2} \lim \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\theta}{\theta} \varphi(x-\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Um den Gränzwert des ersten Integrales bestimmen zu können, müssen wir dem x noch die Beschränkung $x < \alpha$ auferlegen und erhalten dann durch Anwendung der Formel (91):

$$\int_0^\infty \cos x\omega d\omega \int_0^\alpha \varphi(\theta) \cos \omega\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2}; \quad \alpha > x > 0. \quad (95)$$

Ist nun die Funktion φ eine durchweg stetige, so kann man auf der rechten Seite kürzer $\frac{\pi}{2} \varphi(x)$ schreiben; tritt aber für irgend einen Werth von x eine Unstetigkeit der Funktion ein, so ist der Werth des Integrales gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Werthen, welche dem $\varphi(x)$ an der Stelle der Unstetigkeit zukommen.

Die Gleichung (95) gilt auch noch für $x = 0$; denn man erhält aus (94):

$$\int_0^\infty d\omega \int_0^\alpha \varphi(\theta) \cos \omega \theta d\theta = \lim \int_0^\alpha \frac{\sin (2n+1)\theta}{\theta} \varphi(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

Für negative x giebt die Formel (94) die nämlichen Werthe, wie für positive x ; es wird also hier keine Identität mehr statt finden, wenn nicht zufällig $\varphi(-x) = \varphi(+x)$ wäre.

Nimmt man die nämlichen Operationen, durch welche wir aus dem Integral (93) die Gleichung (94) ableiteten, mit dem Integral

$$\int_0^{2n+1} \sin x\omega d\omega \int_0^\alpha \varphi(\theta) \sin \omega \theta d\theta,$$

so erhält man leicht:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^\infty \sin x\omega d\omega \int_0^\alpha \varphi(\theta) \sin \omega \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \lim \int_{-x}^{\alpha-x} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\theta} \varphi(x+\theta) d\theta - \frac{1}{2} \lim \int_{+x}^{\alpha+x} \frac{\sin (2n+1)\theta}{\theta} \varphi(\theta-\alpha) d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Für $\alpha > x > 0$ leitet man daraus auf die nämliche Weise wie vorhin die Formel ab:

$$\int_0^\infty \sin x\omega d\omega \int_0^\alpha \varphi(\theta) \sin \omega \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2}, \quad \alpha > x > 0. \quad (97)$$

Für $x = 0$ verschwinden beide Theile der Gleichung (96) und für negative x würde nur dann die Formel (97) richtig sein, wenn zufällig $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ wäre.

Die so eben entwickelten Ausdrücke (95) und (97) sind es, von denen die Formeln (80) und (81) spezielle Fälle darstellen, wenn man nämlich das beliebige α unendlich groß nimmt. Man kann noch eine Gleichung ableiten, welche der in (90) entspricht und ebenfalls allgemeiner als dieselbe ist.

Sei nämlich $\varphi(x)$ stetig, so daß die rechten Seiten der Gleichungen (95) und (97) einfach $\frac{\pi}{2} \varphi(x)$ sind und in der ersten $\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$, in der zweiten $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, so ist

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f(x) + f(-x)}{2} &= \int_0^\infty \cos x\omega d\omega \int_0^\alpha \frac{f(\theta) + f(-\theta)}{2} \cos \omega \theta d\theta \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f(x) - f(-x)}{2} &= \int_0^\infty \sin x\omega d\omega \int_0^\alpha \frac{f(\theta) - f(-\theta)}{2} \sin \omega \theta d\theta \end{aligned}$$

und diese Gleichungen gelten auch für negative x , weil in der ersten $\varphi(-x) = \varphi(+x)$, in der zweiten $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ist. Nun findet man aber leicht durch ein ähnliches Verfahren wie in §. 12,

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha [f(\theta) + f(-\theta)] \cos \omega \theta d\theta &= \int_{-\alpha}^\alpha f(\theta) \cos \omega \theta d\theta \\ \int_0^\alpha [f(\theta) - f(-\theta)] \sin \omega \theta d\theta &= \int_{-\alpha}^\alpha f(\theta) \sin \omega \theta d\theta \end{aligned}$$

und folglich durch Addition jener beiden Gleichungen:

I. Die Theoreme von Lagrange und Fourier.

$$\begin{aligned}
 \pi f(x) &= \int_0^\infty \cos x\omega \, d\omega \int_{-\alpha}^\alpha f(\theta) \cos \omega\theta \, d\theta + \int_0^\infty \sin x\omega \, d\omega \int_{-\alpha}^\alpha f(\theta) \sin \omega\theta \, d\theta \\
 &= \int_0^\infty d\omega \int_{-\alpha}^\alpha f(\theta) [\cos x\omega \cos \omega\theta + \sin x\omega \sin \omega\theta] \, d\theta \\
 &= \int_0^\infty d\omega \int_{-\alpha}^\alpha f(\theta) \cos \omega(\theta - x) \, d\theta.
 \end{aligned}$$

Man hat aber auch für negative ω ,

$$\begin{aligned}
 \pi f(x) &= - \int_0^\infty d\omega \int_{-\alpha}^\alpha f(\theta) \cos \omega(\theta - x) \, d\theta \\
 &= + \int_{-\infty}^0 d\omega \int_{-\alpha}^\alpha f(\theta) \cos \omega(\theta - x) \, d\theta.
 \end{aligned}$$

Man erhält demnach durch Addition beider Gleichungen und wenn man φ für f schreibt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \int_{-\alpha}^\alpha \varphi(\theta) \cos \omega(\theta - x) \, d\theta, \quad +\alpha > x > -\alpha. \quad (98)$$

Diese Formel enthält wieder die Gleichung (90) als speziellen Fall, wenn man α unendlich groß nimmt.

Die bisher entwickelten Resultate finden in der Mechanik und Theorie der Wärme vielfache Anwendung; sie sind aber auch für die Integralrechnung von Wichtigkeit, weil sich aus ihnen die Werthe vieler bestimmten Integrale ableiten lassen. Mit den Betrachtungen der letzteren Art werden wir uns in der folgenden Abtheilung beschäftigen.

II.

Anwendungen der Theoreme von Lagrange und Fourier.

§. 1.

Wir haben früher die Ausdrücke (47) und (50), in denen die Coefficienten a_n und b_n durch die Formeln (46) und (49) bestimmt werden, zur Entwicklung von Funktionen in Reihen benutzt; sie sind aber noch einer anderen Ansicht fähig. Kann man nämlich auf anderem Wege die Summe einer unter der Form (47) oder (50) enthaltenen Reihe ermitteln, so muß diese Summe $f(z)$ die Gleichung (46) oder (49) erfüllen, wodurch man oft zur Kenntniss eines bestimmten Integrales gelangt, das man auf gewöhnliche Weise nicht so leicht erhalten haben würde.

Es werden z. B. in der Analysis des Endlichen folgende Formeln entwickelt (m. s. *Cauchy, Cours d'Analyse Chap. IX*).

$$\frac{1 - r \cos z}{1 - 2r \cos z + r^2} = 1 + r \cos z + r^2 \cos 2z + r^3 \cos 3z + \dots, \quad \left\{ +1 > r > -1 \right\} \quad (1)$$

$$\frac{r \sin z}{1 - 2r \cos z + r^2} = r \sin z + r^2 \sin 2z + r^3 \sin 3z + \dots, \quad \left\{ +1 > r > -1 \right\} \quad (2)$$

$$e^{r \cos z} \cos(r \sin z) = 1 + \frac{r}{1} \cos z + \frac{r^2}{1 \cdot 2} \cos 2z + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos 3z + \dots, \quad \left\{ +1 \geq r \geq -1 \right\} \quad (3)$$

$$e^{r \cos z} \sin(r \sin z) = \frac{r}{1} \sin z + \frac{r^2}{1 \cdot 2} \sin 2z + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin 3z + \dots, \quad \left\{ +1 \geq r \geq -1 \right\} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \log(1 + 2r \cos z + r^2) = \frac{r}{1} \cos z - \frac{r^2}{2} \cos 2z + \frac{r^3}{3} \cos 3z - \dots, \quad \left\{ +1 \geq r \geq -1 \right\} \quad (5)$$

$$\arctan \frac{r \sin z}{1 + r \cos z} = \frac{r}{1} \sin z - \frac{r^2}{2} \sin 2z + \frac{r^3}{3} \sin 3z - \dots, \quad \left\{ +1 \geq r \geq -1 \right\} \quad (6)$$

Die Formeln (2), (4), (6) stehen unmittelbar unter der Form der Reihe (50); die (1), (3), (5) dagegen bedürfen noch einer kleinen Umgestaltung, um auf die Form der Reihe (47) zu kommen. Man erhält leicht

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos z + r^2} = \frac{1}{2} + r \cos z + r^2 \cos 2z + r^3 \cos 3z + \dots$$

$$e^{r \cos z} \cos(r \sin z) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{r}{1} \cos z + \frac{r^2}{1 \cdot 2} \cos 2z + \frac{r^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos 3z + \dots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log(1 - 2r \cos z + r^2) = \frac{1}{2} + \frac{r}{1} \cos z + \frac{r^2}{2} \cos 2z + \frac{r^3}{3} \cos 3z + \dots$$

Vergleicht man diese Formeln mit (47) und (46), so ergibt sich auf der Stelle:

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \cos nx \, dx = r^n$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left\{ e^{r \cos x} \cos(r \sin x) - \frac{1}{2} \right\} \cos nx \, dx = \frac{r^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(1-2r \cos x + r^2) \right\} \cos nx \, dx = \frac{r^n}{n},$$

woraus man durch Integration der einzelnen Glieder in der zweiten und dritten Formel leicht die folgenden ableitet:

$$\int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \cos nx \, dx = \pi r^n \quad (7)$$

$$\int_0^\pi e^{r \cos x} \cos(r \sin x) \cos nx \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}, \quad \text{für } n > 0, \quad (8)$$

dagegen für $n = 0$,

$$\int_0^\pi e^{r \cos x} \cos(r \sin x) \, dx = \pi, \quad (9)$$

ferner

$$\int_0^\pi \ln(1-2r \cos x + r^2) \cos nx \, dx = -\pi \frac{r^n}{n}, \quad \text{für } n > 0, \quad (10)$$

und für $n = 0$,

$$\int_0^\pi \ln(1-2r \cos x + r^2) \, dx = 0. \quad (11)$$

Vergleicht man ferner die Formeln (2), (4), (6), in deren letzter wir r negativ nehmen mit (50) und (49), so ergeben sich die Integrale:

$$\int_0^\pi \frac{r \sin x}{1-2r \cos x + r^2} \sin nx \, dx = \frac{\pi}{2} r^n \quad (12)$$

$$\int_0^\pi e^{r \cos x} \sin(r \sin x) \sin nx \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad (13)$$

$$\int_0^\pi \arctan \frac{r \sin x}{1-r \cos x} \sin nx \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^n}{n}, \quad (14)$$

wobei noch zu bemerken ist, daß in diesen Formeln für r die Determinationen gelten, welche in den Reihen (1) bis (6) angegeben sind.

Es lassen sich aus den eben betrachteten bestimmten Integralen noch viele andere ableiten, welche sich von den obigen dadurch unterscheiden, daß statt des $\cos nx$ oder $\sin nx$ eine der übrigen trigonometrischen Funktionen steht, während sonst die Differenzialformel die nämliche bleibt. Bei dieser Transformation spielen besonders folgende Reihensummierungen eine Rolle, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt, wenn man mit dem Nenner der rechten Seite multipliziert und links jedes doppelte Produkt zerlegt.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x - \frac{\cos (2n+1) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (15)$$

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \dots + \sin nx = \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} x + \frac{\sin (2n+1) \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}} \quad (16)$$

$$\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \dots + \cos (2n+1)x = \frac{1}{2} \sec x + \frac{\cos (2n+2) \frac{x}{2}}{2 \cos x} \quad (17)$$

Man nehme jetzt in der Formel (12) $n = 1, 2, 3, \dots, n$ und addire sämtliche so entstehenden Glieder; dann wird

$$\int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \left\{ \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx \right\} dx \left\{ \begin{array}{l} + 1 > r > -1. \\ = \frac{\pi}{2} \{ r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \}. \end{array} \right.$$

Durch Anwendung der Summenformel (15) ist die linke Seite gleich

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \cot \frac{1}{2} x dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \cdot \frac{\cos (2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx,$$

wobei das zweite Integral für $x = 2\theta$ sich so gestaltet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \cdot \frac{\cos (2n+1) \theta}{\sin \theta} d\theta.$$

Gehen wir nun zur Gränze für wachsende n über, so wird

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \cot \frac{1}{2} x dx - \lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \cdot \frac{\cos (2n+1) \theta}{\sin \theta} d\theta \left\{ \begin{array}{l} + 1 > r > -1. \\ = \frac{\pi}{2} \{ r + r^2 + r^3 + \dots + \text{in inf.} \} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{1-r} \end{array} \right. \quad (18).$$

Auf der linken Seite haben wir noch die Lim. zu bestimmen. Durch Zusetzung des Faktors $\frac{\cos \theta}{\cos \theta}$ wird das Integral gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos (2n+1) \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{r \sin 2\theta}{1 - r \cos 2\theta + r^2} \cdot \cot \theta d\theta.$$

Nach Formel (53) in I. ist die Gränze, der sich dieses Integral nähert, leicht zu bestimmen, wenn man die dortige ganze Zahl $r = 0$ und

$$f(\theta) = \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \cot \theta$$

nimmt. Die Gränze ist $\pi f(\frac{1}{2} \pi)$, d. h. in unserem Falle Null, weil $\cot \frac{1}{2} \pi = 0$ ist. Also haben wir aus (18):

$$\int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \cot \frac{1}{2} x dx = \pi \frac{r}{1-r}, \quad + 1 > r > -1. \quad (19)$$

2) Man nehme wieder in Formel (12) $n = 1, 2, 3, \dots, n$ und summire alle entstehenden Glieder mit wechselnden Zeichen, so ist

$$\int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \left\{ \sin x - \sin 2x + \sin 3x - \dots + \sin nx \right\} dx \left\{ \begin{array}{l} + 1 > r > -1, \\ = \frac{\pi}{2} \{ r - r^2 + r^3 - \dots + r^n \} \end{array} \right.$$

wobei sich durch Anwendung der Summenformel (16) die linke Seite so gestaltet:

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \tan \frac{1}{2} x dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \cdot \frac{\sin (2n+1) \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx.$$

Das zweite dieser Integrale wird für $x = 2\theta$ gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \cdot \frac{\sin (2n+1) \theta}{\cos \theta} d\theta.$$

Gehen wir zur Gränze für wachsende n über, so ist

$$\left\{ \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \tan \frac{1}{2} x dx + \lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \cdot \frac{\sin (2n+1) \theta}{\cos \theta} d\theta \right\} + 1 > r > -1. \quad (20)$$

$$= \frac{\pi}{2} \{ r - r^2 + r^3 - \dots \text{in inf.} \} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{1+r}.$$

Für die Bestimmung der Lim des zweiten Integrales auf der linken Seite schreiben wir dasselbe durch Zusetzung des Faktors $\frac{\sin \theta}{\sin \theta}$ folgendermaßen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n+1) \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \tan \theta d\theta,$$

welches sich für

$$f(\theta) = \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \tan \theta$$

unter die Form der Gleichung (14) (in I.) stellt. Für wachsende n nähert es sich der Gränze $\frac{\pi}{2} f(0)$, d. h. der Null, weil offenbar in unserem Falle $f(0) = 0$ ist. Wir haben daher aus (20):

$$\int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \tan \frac{1}{2} x dx = \pi \frac{r}{1+r}, \quad + 1 > r > -1. \quad (21)$$

Durch Addition von (19) und (21) und Beachtung, daß $\tan \frac{1}{2} x + \cot \frac{1}{2} x = 2 \operatorname{cosec} x$ ist, ergibt sich:

$$\int_0^\pi \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} \operatorname{cosec} x dx = \pi \frac{r}{1-r^2}, \quad + 1 > r > -1, \quad (22)$$

eine Gleichung, welche im Grunde mit (7) zusammenfällt, wenn man dort $n = 0$ setzt, die aber der Symmetrie wegen nicht fehlen durfte.

5) Man nehme in der Formel (7) $n = 1, 3, 5, \dots$ und addire die entstehenden Glieder mit wechselnden Zeichen, so ist

$$\left. \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \{ \cos x - \cos 3x + \cos 5x - \dots + \cos (2n+1)x \} dx \right\} + 1 > r > -1.$$

$$= \pi \{ r - r^3 + r^5 - \dots + r^{2n+1} \}$$

Vermöge der Formel (17) ist die linke Seite gleich

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \sec x dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \cdot \frac{\cos (2n+2)x}{\cos x} dx$$

und folglich, wenn man zur Gränze für wachsende n übergeht,

$$\left. \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \sec x dx + \frac{1}{2} \lim \int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \cdot \frac{\cos (2n+2)x}{\cos x} dx \right\} + 1 > r > -1. \quad (25)$$

$$= \pi \{ r - r^3 + r^5 - \dots \text{in inf.} \} = \pi \frac{r}{1+r^2}$$

Zur Bestimmung der Lim auf der linken Seite bemerke man, daß

$$\frac{\cos (2n+2)x}{\cos x} = \cos (2n+1)x - \sin (2n+1)x \tan x$$

$$= \frac{\cos (2n+1)x}{\cos x} \cdot \cos x - \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} \tan x \sin x$$

ist, wodurch die Lim jenes Integrales folgende wird:

$$\lim \int_0^\pi \frac{\cos (2n+1)x}{\cos x} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \cos x dx = \lim \int_0^\pi \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} \cdot \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \tan x \sin x dx.$$

Vermöge der Formeln (34) und (21) (in I.) findet man leicht, daß sich jedes dieser Integrale der Null nähert und also ist aus (23):

$$\int_0^\pi \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \sec x dx = 2\pi \frac{r}{1+r^2}, \quad +1 > r > -1. \quad (24)$$

Wendet man ganz diefes nämliche Verfahren, durch welches man die Formeln (19), (21), (22), (24) erhalten hat, auf die Integrale (13) und (8), (14) und (10) an, so ergeben sich folgende Resultate:

$$\int_0^\pi e^{r \cos x} \sin (r \sin x) \cot \frac{1}{2} x dx = \pi (e^r - 1) \quad (25)$$

$$\int_0^\pi e^{r \cos x} \sin (r \sin x) \tan \frac{1}{2} x dx = \pi (1 - e^{-r}) \quad (26)$$

$$\int_0^\pi e^{r \cos x} \sin (r \sin x) \operatorname{cosec} x dx = \pi (e^r - e^{-r}) \quad (27)$$

$$\int_0^\pi e^{r \cos x} \cos (r \sin x) \sec x dx = \pi \sin r \quad (28)$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctan} \frac{r \sin x}{1-r \cos x} \cdot \cot \frac{1}{2} x dx = \pi l \left(\frac{1}{1-r} \right) \quad (29)$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctan} \frac{r \sin x}{1-r \cos x} \cdot \tan \frac{1}{2} x dx = \pi l(1+r) \quad (30)$$

$$\int_0^\pi \operatorname{Arctan} \frac{r \sin x}{1 - r \cos x} \cdot \operatorname{cosec} x \, dx = \pi \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (31)$$

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) \sec x \, dx = -2\pi \operatorname{Arctan} r \quad (32)$$

und in allen diesen Formeln muß $-1 \leq r \leq 1$ sein.

§. 2.

Noch andere Integrale von ähnlichen Formen erhält man auf folgende Weise. Man setze in der Gleichung (12) p für r , $n = 1, 2, 3, \dots$ in inf. und multipliziere die entstehenden Glieder der Reihe nach mit $q, q^2, q^3, \dots$, so ist

$$\int_0^\pi \frac{p \sin x}{1 - 2p \cos x + p^2} \left\{ q \sin x + q^2 \sin 2x + q^3 \sin 3x + \dots \right\} dx \left\{ \begin{array}{l} +1 > p > -1 \\ +1 > q > -1 \end{array} \right. \\ = \frac{\pi}{2} \left\{ pq + p^2 q^2 + p^3 q^3 + \dots \right\}$$

Unter der Voraussetzung, daß auch q ein echter Bruch sei, lassen sich beide Reihen leicht summieren (die erste nach Formel (2), wenn man r durch q ersetzt), wodurch man erhält:

$$\int_0^\pi \frac{p \sin x}{1 - 2p \cos x + p^2} \cdot \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{pq}{1 - pq} \left| \begin{array}{l} +1 > p > -1 \\ +1 > q > -1 \end{array} \right| \quad (33)$$

Nimmt man in dieser Formel $q = 1$, so erhält man (19), indem man nur r für p zu schreiben braucht. Allein es ist nur Zufall, daß die vorstehende Formel für diesen Werth von x ein richtiges Resultat gegeben hat.

Denn der Faktor $\frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}$ war die Summe der Reihe $q \sin x + q^2 \sin 2x + \dots$ und für $q = 1$ hätte man $\cot \frac{1}{2} x = \sin x + \sin 2x + \dots$, eine ganz falsche Gleichung, weil nämlich in der Summenformel (15) das zweite Glied rechts, d. h. der Rest der Reihe für wachsende n nicht verschwindet, sondern zwischen $+\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$ und $-\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$ oszillirt. Dagegen annullirt sich dieser Rest, wenn er mit

$\frac{p \sin x}{1 - 2p \cos x + p^2} dx$ multipliziert und zwischen den Grenzen 0 und π integriert wird, wie wir im vorigen Paragraphen Formel (18) u. f. gesehen haben. Diesem Umstande haben wir es zu verdanken, daß die Formel (33) für $q = 1$ noch richtig ist; aber es wäre nichts weniger als streng gewesen, wenn wir die Formel (19) auf diese Weise aus der obigen (33) hätten ableiten wollen.

Auf ähnliche Weise behandelt giebt die Formel (7):

$$\int_0^\pi \frac{1 - p^2}{1 - 2p \cos x + p^2} \left\{ \frac{1}{2} + q \cos x + q^2 \cos 2x + q^3 \cos 3x + \dots \right\} dx \\ = \pi \left\{ \frac{1}{2} + pq + p^2 q^2 + p^3 q^3 + \dots \right\}$$

oder durch Summierung beider Reihen:

$$\int_0^\pi \frac{1 - p^2}{1 - 2p \cos x + p^2} \cdot \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} dx = \pi \frac{1 + pq}{1 - pq} \left| \begin{array}{l} +1 > p > -1 \\ +1 > q > -1 \end{array} \right| \quad (34)$$

Verfährt man auf gleiche Weise mit den Formeln (13), (9), (14), (10), so ergeben sich folgende Resultate:

$$\int_0^\pi \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} e^{p \cos x} \sin(p \sin x) dx = \frac{\pi}{2} (e^{pq} - 1) \quad \left. \begin{array}{l} + \infty > p > -\infty \\ + 1 > q > -1 \end{array} \right\} \quad (35)$$

$$\int_0^\pi \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} e^{p \cos x} \cos(p \sin x) dx = \pi e^{pq} \quad \left. \begin{array}{l} + \infty > p > -\infty \\ + 1 > q > -1 \end{array} \right\} \quad (36)$$

$$\int_0^\pi \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \operatorname{Arctan} \frac{p \sin x}{1 - p \cos x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \left(\frac{1}{1 - pq} \right) \quad \left. \begin{array}{l} + 1 \geq p \geq -1 \\ + 1 > q > -1 \end{array} \right\} \quad (37)$$

$$\int_0^\pi \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2} \ln(1 - 2p \cos x + p^2) dx = 2\pi \ln(1 - pq) \quad \left. \begin{array}{l} + 1 \geq p \geq -1 \\ + 1 > q > -1 \end{array} \right\} \quad (38)$$

deren Zahl sich leicht vermehren läßt, wenn man bald p bald q negativ nimmt, und die so entstehenden Formeln durch Addition und Subtraktion combinirt.

§. 3.

Eine reichere Quelle bestimmter Integrale bieten die Formeln (80) und (81) dar. Wählt man nämlich die beliebige Funktion $\varphi(x)$ so, daß man die erste Integration nach θ ausführen kann, so läßt sich doch nur selten auch die zweite für ω nach den gewöhnlichen Regeln vollenden. Man weiß aber schon, daß dieselbe $\varphi(x)$ zum Resultat geben muß, und so führt dieß zur Kenntniß eines bestimmten Integrales, das man auf anderem Wege nicht so leicht gefunden hätte.

Man nehme z. B. in den Formeln (80) und (81) $\varphi(x) = e^{-\alpha x}$, so muß sein:

$$e^{-\alpha x} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos x\omega d\omega \int_0^\infty e^{-\alpha\theta} \cos \omega\theta d\theta$$

$$e^{-\alpha x} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin x\omega d\omega \int_0^\infty e^{-\alpha\theta} \sin \omega\theta d\theta.$$

Nach den Formeln (30)* und (36)* können wir die ersten Integrationen nach θ ausführen; und es bleibt:

$$e^{-\alpha x} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos x\omega d\omega \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos x\omega}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega$$

$$e^{-\alpha x} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin x\omega d\omega \cdot \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \sin x\omega}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega$$

oder auch, wenn wir θ für ω schreiben und die erste Gleichung mit $\frac{\pi}{2\alpha}$, die zweite mit $\frac{\pi}{2}$ multiplizieren:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha x}, \quad \infty \geq x \geq 0 \quad (39)$$

$$\int_0^\infty \frac{\theta \sin x\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha x}, \quad \infty > x > 0. \quad (40)$$

Diese Formeln, in denen α und x beliebige essentiell positive Constanten bedeuten, bilden die Grundlage zur Errichtung eines sehr ausgedehnten Systems von Integralen zwischen den Gränzen 0 und ∞ , die fast alle von interessanten Formen sind.

Zuerst kann man bemerken, daß das zweite Integral (40) nichts Anderes als der partielle Differenzialquotient des ersten nach x ist. Denn man hat den bekannten Satz: Wenn A, B, k beliebige Constanten und $f(k, \theta)$ eine beliebige Funktion von k und θ bedeutet, ferner

$$u = \int_A^B f(k, \theta) d\theta$$

gesetzt wird, so ist der partielle Differenzialquotient des Integrales nach k ,

$$\left(\frac{du}{dk}\right) = \int_A^B \left(\frac{df(k, \theta)}{dk}\right) d\theta.$$

Wendet man dies auf das Integral (39) an, indem man x als die Constante k betrachtet, so erhält man sogleich die Gleichung (40).

Man kann aber ebenso das Integral (39) auch nach α differenzieren; und in diesem Falle ergibt sich leicht

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^2} d\theta = \frac{\pi e^{-\alpha x}}{1 \cdot 2^2} \left\{ \frac{x}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} \right\},$$

bei nochmaliger Differenziation nach α ,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^3} d\theta = \frac{\pi e^{-\alpha x}}{1 \cdot 2 \cdot 2^3} \left\{ \frac{x^2}{\alpha^3} + \frac{3x}{\alpha^4} + \frac{3}{\alpha^5} \right\},$$

ebenso, wenn man wieder nach α differenziert,

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^4} d\theta = \frac{\pi e^{-\alpha x}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4} \left\{ \frac{x^3}{\alpha^4} + \frac{6x^2}{\alpha^5} + \frac{15x}{\alpha^6} + \frac{15}{\alpha^7} \right\}.$$

Man übersieht leicht, wie sich dieses Verfahren fortsetzen läßt und welches Gesetz auf der rechten Seite obwaltet. Bezeichnet nämlich n eine beliebige ganze Zahl und $\Gamma(n)$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$, so ist

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\cos x\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^{n+1}} d\theta \\ &= \frac{\pi e^{-\alpha x}}{\Gamma(n+1) 2^{n+1}} \left\{ \frac{x^n}{\alpha^{n+1}} + \frac{(n+1)n}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{\alpha^{n+2}} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^{n-2}}{\alpha^{n+3}} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Ähnliche Behandlung der Gleichung (40) giebt den Differenzialquotienten der vorstehenden Reihe nach x genommen, nämlich

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\theta \sin x\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^{n+1}} d\theta \\ &= \frac{\pi e^{-\alpha x}}{\Gamma(n+1) 2^{n+1}} \left\{ \frac{x^n}{\alpha^n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{\alpha^{n+1}} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^{n-2}}{\alpha^{n+2}} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

§. 4.

Wir wollen jetzt aus den Formeln (39) und (40) einige andere ableiten, in welchen der Nenner der Differenzialformel der nämliche bleibt, der Zähler dagegen statt $\cos x\theta$ oder $\sin x\theta$ die andern trigonometrischen Funktionen $\cot$, $\tan$, cosec und $\sec$ enthält. Der Weg, auf welchem wir dazu gelangen, ist der Hauptsache nach der nämliche, den wir schon in §. 2. gegangen sind.

1) Man setze zuvörderst in (40) $x = 1, 2, 3 \dots n$, und addire alle so entstehenden Glieder, so kommt

$$\int_0^\infty \frac{\theta}{\alpha^2 + \theta^2} \{ \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta \} d\theta \\ = \frac{\pi}{2} \left\{ e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots + e^{-n\alpha} \right\}$$

Bringen wir die Formel (15) in Anwendung und gehen zur Gränze für wachsende n über, so ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\theta \cot \frac{1}{2} \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta - \frac{1}{2} \operatorname{Lim} \int_0^\infty \frac{\theta}{\alpha^2 + \theta^2} \cdot \frac{\cos (2n+1) \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta \\ = \frac{\pi}{2} \left\{ e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + \dots \text{in inf.} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Das zweite Integral verwandelt sich, wenn man 2θ für θ schreibt, folgendermaßen:

$$\operatorname{Lim} \int_0^\infty \frac{2\theta}{\alpha^2 + 4\theta^2} \cdot \frac{\cos (2n+1) \theta}{\sin \theta} d\theta = \operatorname{Lim} \int_0^\infty \frac{\cos (2n+1) \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{2\theta \cot \theta}{\alpha^2 + 4\theta^2} d\theta,$$

wobei sich die Lim nach Formel (35) in I. bestimmen läßt, wenn man setzt:

$$f(\theta) = \frac{2\theta \cot \theta}{\alpha^2 + 4\theta^2}.$$

Die gesuchte Lim besteht nach jener Formel aus den Größen $f(\frac{1}{2}\pi)$, $f(\frac{3}{2}\pi)$ etc., welche in unserem Falle sämtlich Null sind, weil $\cot \frac{1}{2}\pi = \cot \frac{3}{2}\pi$ etc. $= 0$ ist. Also verschwindet in (43) das zweite Integral und die Reihe rechts läßt sich, vorausgesetzt, daß α nicht Null oder negativ ist, summiren. Man hat demnach

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\theta \cot \frac{1}{2} \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}} - 1},$$

oder, wenn wir $2\omega\theta$ für θ , $2\alpha\omega$ für α schreiben, wobei ω eine beliebige positive Gröfse ist,

$$\int_0^\infty \frac{\theta \cot \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{e^{\frac{\alpha}{2\omega}} - 1}. \quad (44)$$

2) Man nehme in (40) wieder $x = 1, 2, 3 \dots n$ und summire die entstehenden Glieder mit wechselnden Zeichen, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\theta}{\alpha^2 + \theta^2} \{ \sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta - \dots + \sin n\theta \} d\theta \\ = \frac{\pi}{2} \left\{ e^{-\alpha} - e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} - \dots + e^{-n\alpha} \right\}$$

und wenn man mit Anwendung der Formel (16) zur Gränze für wachsende n übergeht:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\theta \tan \frac{1}{2} \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta + \frac{1}{2} \lim \int_0^\infty \frac{\theta}{\alpha^2 + \theta^2} \cdot \frac{\sin (2n+1) \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} d\theta \\ & = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{-\alpha}{e} - \frac{-2\alpha}{e} + \frac{-3\alpha}{e} - \dots \text{in inf.} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Das zweite Integral links gestaltet sich, wenn 2θ für θ gesetzt wird, folgendermaßen:

$$\lim \int_0^\infty \frac{2\theta}{\alpha^2 + 4\theta^2} \cdot \frac{\sin (2n+1) \theta}{\cos \theta} d\theta = \lim \int_0^\infty \frac{\sin (2n+1) \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{2\theta \tan \theta}{\alpha^2 + 4\theta^2} d\theta,$$

wobei sich die Lim. nach Formel (29) in 1. auffinden läßt, wenn man

$$f(\theta) = \frac{2\theta \tan \theta}{\alpha^2 + 4\theta^2}$$

setzt. Diese Lim. besteht aus den Gliedern $f(0)$, $f(\pi)$, $f(2\pi)$... etc., welche in unserem Falle sämtlich $= 0$ sind. Summiren wir noch die Reihe rechts in (45), so wird

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\theta \tan \frac{1}{2} \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e + 1}$$

oder wenn man $2\omega\theta$ für θ , $2\alpha\omega$ für α setzt,

$$\int_0^\infty \frac{\theta \tan \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{e^{2\alpha\omega} + 1}. \quad (46)$$

Addirt man die Formeln (44) und (46), indem man bemerkt, daß $\cot \omega\theta + \tan \omega\theta = 2 \operatorname{cosec} 2\omega\theta$ ist, so erhält man leicht:

$$\int_0^\infty \frac{2\theta \operatorname{cosec} 2\omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{2\pi}{e^{2\alpha\omega} - e^{-2\alpha\omega}}$$

oder wenn man $\frac{1}{2} \omega$ für ω schreibt:

$$\int_0^\infty \frac{\theta \operatorname{cosec} \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{e^{\alpha\omega} - e^{-\alpha\omega}}. \quad (47)$$

3) Um endlich noch eine Formel zu erhalten, in welcher $\sec \omega\theta$ unter dem Integralzeichen steht, nehme man in der Gleichung (39) $x = 1, 3, 5, \dots (2n+1)$ und addire die entstehenden Glieder mit wechselnden Zeichen. Es wird

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2 + \theta^2} \{ \cos \theta - \cos 3\theta + \cos 5\theta - \dots + \cos (2n+1) \theta \} d\theta \\ & = \frac{\pi}{2\alpha} \left\{ \frac{-\alpha}{e} - \frac{-3\alpha}{e} + \frac{-5\alpha}{e} - \dots + \frac{-(2n+1)\alpha}{e} \right\} \end{aligned}$$

oder, wenn man mit Anwendung der Summenformel (17) zur Gränze für wachsende n übergeht,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sec \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2 + \theta^2} \cdot \frac{\cos (2n+2)\theta}{\cos \theta} d\theta \\ & = \frac{\pi}{2\alpha} \left\{ e^{-\alpha} - \frac{3\alpha}{e} + \frac{5\alpha^3}{e^3} - \dots \text{in inf.} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{\cos (2n+2)\theta}{\cos \theta} &= \cos (2n+1)\theta - \frac{\sin (2n+1)\theta}{\cos \theta} \sin \theta \\ &= \cos (2n+1)\theta - \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} \tan \theta \sin \theta, \end{aligned}$$

folglich das zweite Integral in (48):

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\cos (2n+1)\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\tan \theta}{\alpha^2 + \theta^2} \sin \theta d\theta.$$

Die Gränze, welcher sich das erste Integral nähert, können wir leicht bestimmen, wenn wir in Formel (39) $x = 2n+1$ setzen und n ins Unendliche wachsen lassen. Es ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\cos (2n+1)\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(2n+1)\alpha} = 0.$$

Die Lim. des zweiten Integrales findet sich, wenn wir in Formel (29), I.,

$$f(\theta) = \frac{\tan \theta \sin \theta}{\alpha^2 + \theta^2}$$

setzen. Diese Gränze besteht aus den Gliedern $f(0)$, $f(\pi)$, $f(2\pi)$ etc., welche in unserem Falle sämmtlich $= 0$ sind. Also nähert sich auch das zweite Integral der Null. Folglich ergibt sich aus (48), wenn wir die Reihe rechts summiren:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sec \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \cdot \frac{1}{e^\alpha + e^{-\alpha}}$$

oder, wenn wir $\omega\theta$ für θ , $\omega\alpha$ für α setzen:

$$\int_0^\infty \frac{\sec \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{1}{e^{\alpha\omega} + e^{-\alpha\omega}} \quad (49)$$

4) Man kann noch etwas allgemeinere Integrale dieser Art aus der Formel (40) ableiten. Man setze nämlich wieder $x = 1, 2, 3, \dots$ in inf., multiplizire die einzelnen so entstehenden Glieder mit $r, r^2, r^3, \dots$ etc. und addire sie nun, so ist

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\theta}{\alpha^2 + \theta^2} \left\{ r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta + r^3 \sin 3\theta + \dots \right\} d\theta \\ & = \frac{\pi}{2} \left\{ r e^{-\alpha} + r^2 e^{-2\alpha} + r^3 e^{-3\alpha} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Vorausgesetzt, daß der absolute Werth von r ein ächter Bruch ist, lassen sich beide Reihen summiren und zwar die unter dem Integralzeichen stehende nach Formel (2); man hat dann

$$\int_0^\infty \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \cdot \frac{\theta d\theta}{\alpha^2 + \theta^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{e^{\alpha r} - r}, \quad +1 > r > -1. \quad (50)$$

Für $r = 1$ geht diese Formel in die der 44sten vorhergehende über, was aber nur dem Zufall zu

verdanken ist. Gegen diese Art, die Gleichung (44) zu beweisen, welche man bei Legendre in den *Exercices de calc. intégr. tome II. pag. 123* findet, lassen sich nämlich dieselben Einwürfe machen, die wir nach der Formel (33) angeführt haben, und daher ist die obige Ableitung des Integrales (44) vorzuziehen.

Behandelt man ähnlich die Gleichung (39), so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2 + \theta^2} \{1 + r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + r^3 \cos 3\theta + \dots\} d\theta \\ = \frac{\pi}{2\alpha} \left\{1 + \frac{e^{-\alpha}}{r} + \frac{e^{-2\alpha}}{r^2} + \frac{e^{-3\alpha}}{r^3} + \dots\right\}$$

oder durch Summierung beider Reihen nach Formel (1):

$$\int_0^\infty \frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \cdot \frac{d\theta}{\alpha^2 + \theta^2} = \frac{\pi}{2\alpha} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{c-r}}}{c-r} + 1 > r > -1. \quad (51)$$

§. 5.

Aus den Integralen (44), (46), (47), (49) lassen sich mittelst folgendes Satzes noch mehrere andere ableiten.

Bedeutet $f(\omega, \theta)$ eine beliebige Funktion zweier Veränderlichen ω, θ , und sind A, B, a, b irgend welche Constanten, so ist jederzeit

$$\int_A^B d\omega \int_a^b f(\omega, \theta) d\theta = \int_a^b d\theta \int_A^B f(\omega, \theta) d\omega, \quad (52)$$

d. h. es ist gleichgültig, in welcher Ordnung man die beiden Integrationen nach θ und ω vornimmt.

1) Wenden wir dies zunächst auf das Integral (44) an, indem wir beiderseits mit $d\omega$ multiplizieren und zwischen den Gränzen h und k integrieren, wo h und k beliebige positive Größen sind, so wird

$$\int_k^h d\omega \int_0^\infty \frac{\theta \cot \omega \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \int_0^\infty \frac{\theta d\theta}{\alpha^2 + \theta^2} \int_k^h \cot \theta \omega d\omega \\ = \pi \int_k^h \frac{d\omega}{e^{2\alpha\omega} - 1}$$

Bekanntlich ist aber $\int \cot \theta \omega d\omega = \frac{1}{\theta} \sin \theta \omega$, folglich

$$\int_k^h \cot \omega d\omega = \frac{1}{\theta} \{1 \sin h\theta - 1 \sin k\theta\}.$$

Auf der rechten Seite ist

$$\int_k^h \frac{d\omega}{e^{2\alpha\omega} - 1} = \int_k^h \frac{e^{-2\alpha\omega}}{1 - e^{-2\alpha\omega}} d\omega = \frac{1}{2\alpha} \left(1 - \frac{e^{-2\alpha h}}{1 - e^{-2\alpha h}}\right) \\ \int_k^h \frac{d\omega}{e^{2\alpha\omega} - 1} = \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{1 - e^{-2\alpha h}}{1 - e^{-2\alpha k}} \right)$$

Durch Substitution beider Integrale wird

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \sin h\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta - \int_0^{\infty} \frac{1 \sin k\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{1 - e^{-2ah}}{1 - e^{-2ak}}. \quad (53)$$

Wir wollen jetzt in dem zweiten Integrale die Grösse k ins Unendliche wachsen lassen und die Gränze auszumitteln suchen, welcher sich das Integral in diesem Falle nähert. Dazu führt folgende Betrachtung. Es ist offenbar für jedes beliebige m ,

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \sin m\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \frac{1 \sin m\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2m}}^{\infty} \frac{1 \sin m\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta.$$

Nehmen wir im ersten Integrale $\theta = \frac{z}{m}$, im zweiten $\theta = \frac{\pi}{2m} + z$, so verwandelt sich die Gleichung in die folgende:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \sin m\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 \sin z}{\alpha^2 + \left(\frac{z}{m}\right)^2} dz + \int_0^{\infty} \frac{1 \cos mz}{\alpha^2 + \left(\frac{\pi}{2m} + z\right)^2} dz. \quad (53)^*$$

Gehen wir jetzt zur Gränze für wachsende m über, so haben wir

$$\lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 \sin z}{\alpha^2 + \left(\frac{z}{m}\right)^2} dz = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \sin z dz,$$

oder wenn wir $\frac{z}{2}$ für z setzen:

$$= \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{\pi} 1 \sin \frac{z}{2} dz = -\frac{\pi l^2}{2\alpha^2},$$

wobei der Werth des Integrals aus Formel (11) für $r = 1$ genommen ist. Daher wird

$$\lim \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 \sin z}{\alpha^2 + \left(\frac{z}{m}\right)^2} dz = \lim \frac{-\pi l^2}{2\alpha^2 m} = 0$$

und aus der Gleichung (53)*, wenn wir auch im zweiten Integral m unendlich werden lassen,

$$\lim \int_0^{\infty} \frac{1 \sin m\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \lim \int_0^{\infty} \frac{1 \cos \frac{m}{2} \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ändert aber ihren Werth nicht, wenn wir θ für z und $\frac{m}{2}$ für m setzen, weil $\frac{m}{2}$ mit m zugleich unendlich groß wird. Es ist daher

$$\lim \int_0^{\infty} \frac{1 \sin m\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \lim \int_0^{\infty} \frac{1 \cos \frac{m}{2} \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta$$

und folglich

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1 \sin m\theta - 1 \cos \frac{m}{2} \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = 0.$$

Es ist aber der Zähler des Integrales

$$= 1 \frac{\sin m\theta}{\cos \frac{m}{2} \theta} = 1 (2 \sin \frac{m}{2} \theta),$$

folglich auch

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{12 + 1 \sin \frac{m}{2} \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = 0$$

oder, wenn man jedes einzelne Glied integriert,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1 \sin \frac{m}{2} \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = -\frac{\pi}{2\alpha} 12.$$

Gehen wir auch in der Gleichung (53) zur Gränze für wachsende $k = \frac{m}{2}$ über und substituieren das gefundene Resultat, so wird

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \sin h\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta + \frac{\pi}{2\alpha} 12 = \frac{\pi}{2\alpha} 1 (1 - e^{-2\alpha h})$$

oder, wenn wir das Glied $\frac{\pi}{2\alpha} 12$ transponiren und ω für h schreiben:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \sin \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} 1 \left(1 - \frac{e^{-2\alpha\omega}}{2}\right). \quad (54)$$

2) Wir wollen nun den Satz (52) auch auf das Integral (46) anwenden. Es ist dann

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} d\omega \int_0^{\infty} \frac{\theta \tan \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta &= \int_0^{\infty} \frac{\theta d\theta}{\alpha^2 + \theta^2} \int_0^{\omega} \tan \theta\omega d\omega \\ &= \pi \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{e^{2\alpha\omega} + 1} \end{aligned}$$

Man hat hier $\int_0^{\omega} \tan \theta\omega d\omega = -\frac{1}{\theta} \{1 \cos \theta\omega - 1 \cos 0\} = -\frac{1}{\theta} 1 \cos \omega\theta$, ferner auf der rechten Seite:

$$\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{e^{2\alpha\omega} + 1} = \int_0^{\omega} \frac{e^{-2\alpha\omega}}{1 + e^{-2\alpha\omega}} d\omega = -\frac{1}{2\alpha} \left\{1 \left(1 + \frac{e^{-2\alpha\omega}}{2}\right) - 12\right\} = -\frac{1}{2\alpha} 1 \frac{1 + e^{-2\alpha\omega}}{2},$$

folglich durch Substitution beider Werthe:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \cos \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} 1 \left(1 + \frac{e^{-2\alpha\omega}}{2}\right). \quad (55)$$

Aus (54) und (55) erhält man noch durch Subtraktion:

$$\int_0^\infty \frac{1 \tan \omega \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \ln \frac{1 - e^{-2\alpha\omega}}{1 + e^{-2\alpha\omega}} \quad (56)$$

$$\int_0^\infty \frac{1 \cot \omega \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \ln \frac{1 + e^{-2\alpha\omega}}{1 - e^{-2\alpha\omega}} \quad (57)$$

Ein ganz ähnliches Integral würde man aus Formel (47) ableiten können, das aber von keiner besonderen Bedeutung ist. Dagegen giebt das Integral (49) unter Anwendung des Satzes (52) ein sehr merkwürdiges Resultat. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} \int_0^\omega d\omega \int_0^\infty \frac{\sec \omega \theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta &= \int_0^\omega \frac{d\theta}{\alpha^2 + \theta^2} \int_0^\omega \sec \theta \omega d\omega \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\omega \frac{d\omega}{e^{\alpha\omega} + e^{-\alpha\omega}}. \end{aligned}$$

Ferner ist $\int \sec \theta \omega d\omega = \frac{1}{\theta} \ln \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \omega \theta \right)$, also

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \sec \theta \omega d\omega &= \frac{1}{\theta} \left\{ \ln \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \omega \theta \right) - \ln \tan \frac{\pi}{4} \right\} \\ &= \frac{1}{\theta} \ln \frac{1 + \tan \frac{1}{2} \omega \theta}{1 - \tan \frac{1}{2} \omega \theta}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite jener Gleichung ist

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \frac{d\omega}{e^{\alpha\omega} + e^{-\alpha\omega}} &= \int_0^\omega \frac{e^{-\alpha\omega} d\omega}{1 + (e^{-\alpha\omega})^2} = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \operatorname{Arctan} e^{-\alpha\omega} - \operatorname{Arctan} 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{Arctan} \frac{1 - e^{-\alpha\omega}}{1 + e^{-\alpha\omega}}. \end{aligned}$$

Durch Substitution beider Ausdrücke wird jetzt

$$\int_0^\omega \frac{1 + \tan \frac{1}{2} \omega \theta}{1 - \tan \frac{1}{2} \omega \theta} \cdot \frac{d\theta}{\theta (\alpha^2 + \theta^2)} = \frac{\pi}{\alpha^2} \operatorname{Arctan} \frac{1 - e^{-\alpha\omega}}{1 + e^{-\alpha\omega}}$$

oder, wenn man 2ω für ω setzt,

$$\int_0^\infty \frac{1 + \tan \omega \theta}{1 - \tan \omega \theta} \cdot \frac{d\theta}{\theta (\alpha^2 + \theta^2)} = \frac{\pi}{\alpha^2} \operatorname{Arctan} \frac{1 - e^{-2\alpha\omega}}{1 + e^{-2\alpha\omega}} \quad (58)$$

Von diesem Integral ist noch ein spezieller Fall von Interesse. Man multipliziere beiderseits mit α^2 , so daß

$$\int_0^\infty \frac{1 + \tan \omega \theta}{1 - \tan \omega \theta} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \theta^2} \cdot \frac{d\theta}{\theta} = \pi \operatorname{Arctan} \frac{1 - e^{-2\alpha\omega}}{1 + e^{-2\alpha\omega}}$$

wird, und gehe zur Gränze für wachsende α über, so erhält man

$$\lim_{\alpha^2 \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \theta^2} = \lim_{\theta^2 \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\theta^2}{\alpha^2}} = 1, \text{ und } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \operatorname{Arctan} \frac{1 - e^{-2\alpha\omega}}{1 + e^{-2\alpha\omega}} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ mithin}$$

$$\int_0^\infty \frac{1 + \tan \omega\theta}{1 - \tan \omega\theta} \cdot \frac{d\theta}{\theta} = \frac{\pi^2}{4}. \quad (59)$$

Dafs die rechte Seite von ω unabhängig ist, kann nicht befremden; denn es ist $\frac{d\theta}{\theta} = \frac{d(\omega\theta)}{\omega\theta}$ und nun könnte man für $\omega\theta$ eine neue Veränderliche z setzen, wodurch das Integral die Form

$$\int_0^\infty \frac{1 + \tan z}{1 - \tan z} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{\pi^2}{4}$$

annimmt, welche ebenfalls von ω frei ist.

Man kann in den gefundenen Formeln auch noch α als Veränderliche ansehen und nach ihr integrieren. Man schreibe nämlich in Formel (57) y für α und setze statt des Logarithmus auf der rechten Seite eine unendliche Reihe, so ist

$$\int_0^\infty \frac{y}{\theta^2 + y^2} \log \cot \omega\theta \, d\theta = \pi \left\{ e^{-2\omega y} + \frac{1}{3} e^{-6\omega y} + \frac{1}{5} e^{-10\omega y} + \dots \right\},$$

multipliziert man beiderseits mit $\frac{1}{\pi} \sin \alpha y \, dy$ und integriert zwischen 0 und ∞ , so wird

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha y \, dy \int_0^\infty \frac{y}{\theta^2 + y^2} \log \cot \omega\theta \, d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-2\omega y}}{y} \sin \alpha y \, dy + \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{e^{-6\omega y}}{y} \sin \alpha y \, dy + \frac{1}{5} \int_0^\infty \frac{e^{-10\omega y}}{y} \sin \alpha y \, dy + \dots \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite kann man jedes Integral nach Formel (36)* in I. bestimmen; für die linke Seite kann man setzen:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \log \cot \omega\theta \, d\theta \int_0^\infty \frac{y \sin \alpha y}{\theta^2 + y^2} \, dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\theta}}{\theta} \log \cot \omega\theta \, d\theta.$$

Mithin ist

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\theta}}{\theta} \log \cot \omega\theta \, d\theta = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\omega)^2} + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (6\omega)^2} + \frac{1}{5} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (10\omega)^2} + \dots$$

oder, wenn man $\frac{\omega}{2}$ für ω , 2θ für θ schreibt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha\theta}}{\theta} \log \cot \omega\theta \, d\theta = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (3\omega)^2} + \frac{1}{5} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (5\omega)^2} + \dots \quad (60)$$

Aus der Formel (56) würde man das nämliche Resultat mit negativen Zeichen erhalten, weil offenbar ist:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha\theta}}{\theta} \log \tan \omega\theta \, d\theta = - \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha\theta}}{\theta} \log \cot \omega\theta \, d\theta. \quad (61)$$

Ein anderes Integral erhält man aus (55), wenn man wieder y für α schreibt, rechts statt des Logarithmus eine Reihe setzt, so dafs

$$\int_0^\infty \frac{y}{\theta^2 + y^2} \cos \omega \theta \, d\theta = -\frac{\pi}{2} \cos \omega \theta + \frac{\pi}{2} \left[e^{-2\omega y} - \frac{1}{2} e^{-4\omega y} + \frac{1}{3} e^{-6\omega y} - \dots \right]$$

ist, mit $\frac{2}{\pi} \sin \alpha y \, dy$ multipliziert und zwischen 0 und ∞ integriert. Die linke Seite wird

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha y \, dy \int_0^\infty \frac{y}{\theta^2 + y^2} \cos \omega \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega \theta \, d\theta \int_0^\infty \frac{y \sin \alpha y}{\theta^2 + y^2} \, dy = \int_0^\infty e^{-\alpha \theta} \cos \omega \theta \, d\theta$$

und auf der rechten Seite steht die Reihe

$$\begin{aligned} & -\cos \omega \theta + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-2\omega y} \sin \alpha y \, dy - \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-4\omega y} \sin \alpha y \, dy + \dots \\ & = -\cos \omega \theta + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\omega)^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (4\omega)^2} + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (6\omega)^2} - \dots \end{aligned}$$

Es fragt sich nun noch, für was das mit $\cos \omega \theta$ multiplizierte Integral zu rechnen sei, welches ausgeführt den unbestimmten Ausdruck

$$-\cos \omega \theta \cdot \frac{1 - \cos \infty}{\alpha}$$

gibt, dessen Zähler, worin $\cos \infty$ zwischen $+1$ und -1 oszillirt, alle möglichen Werthe von 0 bis 1 annehmen kann. Sehen wir denselben als eine unbestimmte Constante k an und suchen wir ihn den Bedingungen jener Gleichung gemäß zu bestimmen.

Vergleichen wir die rechte Seite mit der linken und setzen $\omega = 0$, so annullirt sich die erste, also muß auch sein

$$0 = -\cos \omega \theta + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3} \frac{1}{\alpha} - \dots,$$

woraus $k = 1$ folgt. Wir haben daher

$$\int_0^\infty e^{-\alpha \theta} \cos \omega \theta \, d\theta = -\frac{\cos \omega \theta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\omega)^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (4\omega)^2} + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (6\omega)^2} - \dots$$

oder, wenn wir $\frac{\omega}{2}$ für ω , 2θ für θ schreiben:

$$2 \int_0^\infty e^{-\alpha \theta} \cos \omega \theta \, d\theta = -\frac{\cos \omega \theta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\omega)^2} + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (3\omega)^2} - \dots \quad (62)$$

Subtrahiren wir hiervon die Formel (60) doppelt genommen, so ergibt sich noch

$$2 \int_0^\infty e^{-\alpha \theta} \sin \omega \theta \, d\theta = -\frac{\sin \omega \theta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\omega)^2} - \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (3\omega)^2} - \dots \quad (63)$$

§. 6.

Eine andere Reihe von bestimmten Integralen ergibt sich auf folgende Weise. Man schreibe in Formel (55) I. θ für α , so daß

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{z\theta} + e^{-z\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\theta} - \cos z \frac{\theta}{1^2 + \theta^2} + \cos 2z \frac{\theta}{2^2 + \theta^2} - \cos 3z \frac{\theta}{3^2 + \theta^2} + \dots, \quad \pi \geq z \geq 0$$

ist, multipliziere beiderseits mit $\sin \omega \theta d\theta$ und integriere zwischen den Grenzen 0 und ∞ nach θ bei constantem z , so wird

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\pi\theta - \pi\theta} \sin \omega \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \theta}{\theta} d\theta - \cos z \int_0^{\infty} \frac{\theta \sin \omega \theta}{1^2 + \theta^2} d\theta + \cos 2z \int_0^{\infty} \frac{\theta \sin \omega \theta}{2^2 + \theta^2} d\theta - \cos 3z \int_0^{\infty} \frac{\theta \sin \omega \theta}{3^2 + \theta^2} d\theta + \dots$$

Alle Integrale auf der rechten Seite lassen sich nach Formel (40) ausführen, wenn man $x = \omega$ und α der Reihe nach $= 0, 1, 2, 3, \dots$ etc. setzt. Man erhält auf diese Weise die Reihe

$$\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \cos z \cdot \frac{e^{-\omega}}{e} + \cos 2z \cdot \frac{e^{-2\omega}}{e} - \cos 3z \cdot \frac{e^{-3\omega}}{e} + \dots \right\},$$

welche sich, wenn $\omega > 0$ ist, nach Formel (1)* in II. summieren läßt. Man findet die Summe

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{e^{-\omega}}{e}\right)^2}{1 + 2\frac{e^{-\omega}}{e} \cos z + \left(\frac{e^{-\omega}}{e}\right)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + 2 \cos z + e^{-\omega}}.$$

Man hat daher das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\pi\theta - \pi\theta} \sin \omega \theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + 2 \cos z + e^{-\omega}}, \quad \omega > 0, \quad \pi \geq z \geq 0. \quad (64)$$

Ein ähnliches Integral kann man aus Formel (71), I. ableiten. Es ist dort, wenn man θ für α schreibt:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\pi\theta - \pi\theta} = \sin z \frac{1}{1^2 + \theta^2} - 2 \sin 2z \frac{1}{2^2 + \theta^2} + 3 \sin 3z \frac{1}{3^2 + \theta^2} - \dots$$

und durch Multiplikation mit $\cos \omega \theta d\theta$ und Integration zwischen den Grenzen 0 und ∞ :

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\pi\theta - \pi\theta} \cos \omega \theta d\theta = \sin z \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \theta}{1^2 + \theta^2} d\theta - 2 \sin 2z \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \theta}{2^2 + \theta^2} d\theta + 3 \sin 3z \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \theta}{3^2 + \theta^2} d\theta - \dots$$

Bestimmt man die Werthe der einzelnen Integrale rechts, indem man in Formel (39) I. $x = \omega$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ setzt, so erhält man die Reihe:

$$\frac{\pi}{2} \left\{ \sin z \cdot \frac{e^{-\omega}}{e} - \sin 2z \cdot \frac{e^{-2\omega}}{e} + \sin 3z \cdot \frac{e^{-3\omega}}{e} - \dots \right\},$$

welche sich für $\omega > 0$ nach Formel (2) II. summieren läßt. Die Summe ist:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\omega} \sin z}{1 + 2\frac{e^{-\omega}}{e} \cos z + \left(\frac{e^{-\omega}}{e}\right)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin z}{e^{\omega} + 2 \cos z + e^{-\omega}}$$

und daraus entspringt der Werth des bestimmten Integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\pi\theta - \pi\theta} \cos \omega \theta d\theta = \frac{\sin z}{e^{\omega} + 2 \cos z + e^{-\omega}}, \quad \omega > 0, \quad \pi > z > 0. \quad (65)$$

Als spezielle Fälle der Formeln (64) und (65) hat man folgende.

1) Formel (64) giebt für $z = 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega \theta d\theta}{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}}{e^{\frac{\omega}{2}} + 2 + e^{-\frac{\omega}{2}}}$$

oder weil der Zähler rechts $= (e^{\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}})(e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}})$ und der Nenner $= (e^{\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}})^2$ ist,

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega \theta d\theta}{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}}{e^{\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}}}, \quad \omega > 0. \quad (66)$$

Auf ganz ähnliche Weise erhält man aus (64) für $z = \pi$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{\pi\theta}{2}} + e^{-\frac{\pi\theta}{2}}}{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}} \sin \omega \theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}}}{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}}, \quad \omega > 0, \quad (67)$$

und wenn man hiervon die Formel (66) doppelt genommen abzieht, nach leichter Reduktion:

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{\pi\theta}{2}} - e^{-\frac{\pi\theta}{2}}}{e^{\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}}} \sin \omega \theta d\theta = \frac{2}{e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}}, \quad \omega > 0. \quad (68)$$

2) Nimmt man in der Formel (65), in welcher z weder $= \pi$ noch $= 0$ sein darf, $z = \frac{\pi}{2}$, so findet sich

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega \theta d\theta}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} + e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{2}} + e^{-\frac{\omega}{2}}}, \quad \omega > 0. \quad (69)$$

Von diesen, sich durch symmetrischen Bau sehr auszeichnenden Integralen können zwei, nämlich (66) und (69) dazu benutzt werden, irgend eine Bernoullische Zahl oder einen Sekantencoeffizienten durch ein bestimmtes Integral auszudrücken.

Man bemerke nämlich, daß die rechte Seite der Formel (66) nichts Anderes als $-\frac{\sqrt{-1}}{4} \tan\left(\frac{\omega}{2} \sqrt{-1}\right)$

ist, wovon man sich leicht durch Einführung der Exponentialgrößen für $\sin\left(\frac{\omega}{2} \sqrt{-1}\right)$ und $\cos\left(\frac{\omega}{2} \sqrt{-1}\right)$ überzeugt. Entwickelt man jetzt beide Seiten der Gleichung (66) nach Potenzen von ω , die linke nach der Formel

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

und die rechte mittelst der Bernoullischen Zahlen

$$\frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} z = \frac{2^2 - 1}{1 \cdot 2} B_1 z + \frac{2^4 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_3 z^3 + \frac{2^6 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_5 z^5 + \dots,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\omega}{1} \int_0^\infty \frac{\theta d\theta}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} - e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} - \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int_0^\infty \frac{\theta^3 d\theta}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} - e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} + \frac{\omega^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^\infty \frac{\theta^5 d\theta}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} - e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} - \dots \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2^2 - 1}{1 \cdot 2} B_1 \omega - \frac{2^4 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_3 \omega^3 + \frac{2^6 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_5 \omega^5 - \dots \right\} \end{aligned}$$

Aus der Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von ω folgt sogleich für jedes positive ganze n :

$$\int_0^\infty \frac{\theta^{2n-1} d\theta}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} - e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} = \frac{2^{2n} - 1}{4n} B_{2n-1}. \quad (70)$$

Die rechte Seite der Formel (69) ist offenbar $= \frac{1}{2 \cos(\omega \sqrt{-1})} = \frac{1}{2} \sec(\omega \sqrt{-1})$, ein Ausdruck, welcher sich nach der bekannten Gleichung

$$\sec z = B_0 + \frac{B_2}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{B_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 + \frac{B_6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} z^6 + \dots,$$

worin $B_0, B_2, B_4 \dots$ die sogenannten Sekantencoeffizienten sind, in eine ähnliche Reihe verwandeln läßt. Thut man dies auch mit dem Integral in (69), so erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d\theta}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} + e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} &= \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} \int_0^\infty \frac{\theta^2 d\theta}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} + e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} + \frac{\omega^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \int_0^\infty \frac{\theta^4 d\theta}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} + e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} - \dots \\ &= \frac{1}{2} \left\{ B_0 - \frac{B_2}{1 \cdot 2} \omega^2 + \frac{B_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \omega^4 - \dots \right\}, \end{aligned}$$

woraus sich durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von ω für jedes ganze positive n ergibt:

$$\int_0^\infty \frac{\theta^{2n} d\theta}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} + e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} = \frac{1}{2} B_{2n}. \quad (71)$$

Verwandelt man in diesen Formeln (70) und (71) den unter dem Integralzeichen stehenden Bruch in eine Reihe und integrirt jedes einzelne Glied, so findet man die bekannten Summenformeln für die ganzen reziproken Potenzen der natürlichen Zahlen.

§. 7.

Wir wollen jetzt ein Integral betrachten, welches allgemeiner als das in (64) gefundene ist, nämlich das folgende:

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{\frac{z\theta}{2}} + e^{-\frac{z\theta}{2}}}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} - e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} \cdot \frac{\sin x\theta}{\mu^2 + \theta^2} d\theta, \quad (72)$$

worin x wie das frühere ω eine beliebige Constante und μ irgend eine Gröfse ist.

Differenziert man 2mal nach x , so steht unter dem Integralzeichen die nämliche Gröfse nur noch mit $-\theta^2$ multipliziert, so dafs man also hat:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \mu^2 y = - \int_0^\infty \frac{e^{\frac{z\theta}{2}} + e^{-\frac{z\theta}{2}}}{e^{\frac{\pi\theta}{2}} - e^{-\frac{\pi\theta}{2}}} \cdot \frac{\theta^2 + \mu^2}{\mu^2 + \theta^2} \sin x\theta d\theta.$$

Das Integral rechts ist das nämliche wie das in (64); entwickelt man dort den Werth desselben wieder in die Reihe, durch deren Summirung die rechte Seite gefunden worden war, so wird jetzt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \mu^2 y = - \left\{ \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{e} \cos z + \frac{e^{-2x}}{e} \cos 2z - \frac{e^{-3x}}{e} \cos 3z + \dots \right\} \quad (73)$$

Aus dieser Differenzialgleichung wäre nun y zu bestimmen.

Die allgemeine Formel zur Integration einer Differenzialgleichung wie

$$\frac{d^2y}{dx^2} + h \frac{dy}{dx} + ky = \varphi(x),$$

wobei h, k constant sind und $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion von x ist, wird bekanntlich durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$y = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[e^{\lambda_1 x} \int \varphi(x) e^{-\lambda_1 x} dx - e^{\lambda_2 x} \int \varphi(x) e^{-\lambda_2 x} dx \right] + Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}, \quad (74)$$

worin λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2 + h\lambda + k = 0$$

und A, B die beiden willkürlichen Constanten bedeuten.

Es ist hier überflüssig, den Integralen $\int \varphi(x) e^{-\lambda_1 x} dx$ und $\int \varphi(x) e^{-\lambda_2 x} dx$ in (74) Integrationsconstanten beizufügen, weil man sich diese in A und B gleich eingerechnet denken kann.

Wenden wir dies auf unsere Differenzialgleichung (73) an, so ist $\varphi(x)$ gleich der auf der rechten Seite stehenden Reihe und für die Bestimmung von λ_1 und λ_2 haben wir die Gleichung $\lambda^2 - \mu^2 = 0$, woraus $\lambda_1 = +\mu, \lambda_2 = -\mu$ folgt. Es wird daher

$$y = -\frac{e^{\mu x}}{2\mu} \int \left\{ \frac{1}{2} e^{-\mu x} - e^{-(1+\mu)x} \cos z + e^{-(2+\mu)x} \cos 2z - \dots \right\} dx + \frac{e^{-\mu x}}{2\mu} \int \left\{ \frac{1}{2} e^{\mu x} - e^{-(1-\mu)x} \cos z + e^{-(2-\mu)x} \cos 2z - \dots \right\} dx + Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}. \quad (75)$$

Nehmen wir an, daß μ ein positiver echter Bruch sei und führen die einzelnen Integrationen aus, so ergibt sich

$$y = \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{1}{2\mu} - \frac{e^{-x}}{1+\mu} + \frac{e^{-2x}}{2+\mu} - \frac{e^{-3x}}{3+\mu} + \dots \right\} + \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{1}{2\mu} + \frac{e^{-x}}{1-\mu} - \frac{e^{-2x}}{2-\mu} + \frac{e^{-3x}}{3-\mu} - \dots \right\} + Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

oder durch Vereinigung der gleichnamigen Glieder:

$$y = \frac{1}{2\mu^2} + \frac{e^{-x} \cos z}{1^2 - \mu^2} - \frac{e^{-2x} \cos 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{e^{-3x} \cos 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots + Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}. \quad (76)$$

Um noch die Constanten A und B zu bestimmen, stellen wir folgende Ueberlegungen an.

Nehmen wir erstlich an, x sei irgend eine ungerade Zahl $2n+1$, so können wir das Integral y durch Zusetzung des Faktors $\frac{\sin \theta}{\sin \theta}$ auch so schreiben:

$$y = \int_0^\infty \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{e^{\pi\theta} - e^{-\pi\theta}} \cdot \frac{e^{z\theta} + e^{-z\theta}}{\mu^2 + \theta^2} d\theta.$$

Gehen wir zur Gränze für wachsende n über, so können wir die Formel (29) in I. anwenden. Der gesuchte Gränzwert besteht, wenn wir

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\pi\theta} \cdot \frac{e^{z\theta} + e^{-z\theta}}{\mu^2 + \theta^2}$$

setzen, aus den Gröſſen $\frac{\pi}{2} f(0)$, $\pi f(\pi)$, $\pi f(2\pi)$ etc., von denen die erste unbestimmt $= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{0}{0} \cdot \frac{2}{\mu^2}$ ist, während die übrigen sämmtlich $= 0$ sind.

Um den wahren Werth von $\frac{\pi}{2} f(0)$ zu finden, haben wir blos den von

$$\frac{\sin \theta}{\pi\theta} \cdot \frac{e^{z\theta} + e^{-z\theta}}{\mu^2 + \theta^2}, \text{ für } \theta = 0$$

zu bestimmen. Nach der gewöhnlichen Regel der Differenzialrechnung findet man denselben $= \frac{1}{2\pi}$, mithin

$\frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{\mu^2} = \frac{1}{2\mu^2}$, und auch $\lim y = \frac{1}{2\mu^2}$. Gehen wir ebenso in Formel (76) zur Gränze für

wachsende $x = 2n + 1$ über, so erhalten wir, weil $\lim e^{-k(2n+1)} = 0$, $\lim y = \frac{1}{2\mu^2} + A \lim e^{\mu(2n+1)}$

Dieser Werth, in welchem $\lim e^{\mu(2n+1)}$ über alle Gränze hinauswächst, kann nur dann mit dem vorhergefundenen identisch sein, wenn $A = 0$ ist.

Um B zu bestimmen, bemerke man, daß vermöge der Bedeutung von y in (72), für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muß, woraus nach (76) folgt:

$$B = - \left\{ \frac{1}{2\mu^2} + \frac{\cos z}{1^2 - \mu^2} - \frac{\cos 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{\cos 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots \right\}$$

oder nach Formel (52) in 1.:

$$B = - \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{\cos \mu z}{\sin \mu \pi}$$

Also ist nun, wenn wir die gefundenen Werthe von A und B in (76) substituiren und uns an die Bedeutung von y erinnern:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{-\mu x}{\pi e} \frac{\cos \mu z}{\sin \mu \pi} + \int_0^\infty \frac{e^{z\theta} + e^{-z\theta}}{\pi\theta} \cdot \frac{\sin x\theta}{\mu^2 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\mu^2} + \frac{e^{-x}}{1^2 - \mu^2} - \frac{e^{-2x}}{2^2 - \mu^2} + \frac{e^{-3x}}{3^2 - \mu^2} - \dots \end{aligned} \right\} \pi \geq z \geq 0. \quad (77)$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist im Allgemeinen nicht durch die gewöhnlichen Funktionen summierbar. Nur in einem Falle, wenn nämlich $\mu = \frac{1}{2}$, läßt sich ihre Summe durch logarithmische und Kreisfunktionen ermitteln. Man hat dann

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\pi e^{\frac{1}{2}x}} \cos \frac{1}{2}z + \int_0^\infty \frac{e^{z\theta} + e^{-z\theta}}{\pi\theta} \cdot \frac{\sin x\theta}{\frac{1}{4} + \theta^2} d\theta \\ &= 2 + 4 \left\{ \frac{e^{-x}}{1 \cdot 3} - \frac{e^{-2x}}{3 \cdot 5} + \frac{e^{-3x}}{5 \cdot 7} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \pi \geq z \geq 0,$$

oder wenn man $\frac{1}{2}\theta$ für θ , $2x$, $2z$ für x , z schreibt, wo nun das neue z blos von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gehen darf.

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos z + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z\theta} + e^{-z\theta}}{\frac{\pi}{2}\theta - \frac{\pi}{2}\theta} \cdot \frac{\sin x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ & = 1 + 2 \left\{ \frac{e^{-2x} \cos 2z}{1 \cdot 3} - \frac{e^{-4x} \cos 4z}{3 \cdot 5} + \frac{e^{-6x} \cos 6z}{5 \cdot 7} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \frac{\pi}{2} \geq z \geq 0. \quad (78)$$

Da nun $\frac{2}{1 \cdot 3} = 1 - \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}$, $\frac{2}{5 \cdot 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ u. s. f. ist, so können wir statt der Reihe rechts die Doppelreihe schreiben:

$$\left. \begin{aligned} & 1 - \frac{1}{3} e^{-2x} \cos 2z + \frac{1}{5} e^{-4x} \cos 4z - \frac{1}{7} e^{-6x} \cos 6z + \dots \\ & + e^{-2x} \cos 2z - \frac{1}{3} e^{-4x} \cos 4z + \frac{1}{5} e^{-6x} \cos 6z - \dots \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Die Summen dieser Reihen findet man auf folgende Weise. Es ist bekanntlich für $+1 > r > -1$:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2r \cos z + r^2) = r \cos z - \frac{1}{2} r^2 \cos 2z + \frac{1}{3} r^3 \cos 3z - \dots$$

$$\operatorname{Arctan} \frac{r \sin z}{1 + r \cos z} = r \sin z - \frac{1}{2} r^2 \sin 2z + \frac{1}{3} r^3 \sin 3z - \dots,$$

wobei wir die auf der linken Seite stehenden Größen kurz mit $\varphi(r, z)$ und $\psi(r, z)$ bezeichnen wollen. Man hat dann mit Anwendung bekannter goniometrischer Formeln:

$$\varphi(r, z) \cos z + \psi(r, z) \sin z = r - \frac{1}{2} r^2 \cos z + \frac{1}{3} r^2 \cos 2z - \frac{1}{4} r^4 \cos 3z + \dots$$

ebenso wenn man r negativ nimmt:

$$\varphi(-r, z) \cos z + \psi(-r, z) \sin z = -r - \frac{1}{2} r^2 \cos z - \frac{1}{3} r^3 \cos 2z - \frac{1}{4} r^4 \cos 3z - \dots$$

Daraus folgt durch Subtraktion beider und Division mit $2r$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2r} [\varphi(r, z) - \varphi(-r, z)] \cos z + \frac{1}{2r} [\psi(r, z) - \psi(-r, z)] \sin z \\ & = 1 + \frac{1}{3} r^2 \cos 2z + \frac{1}{5} r^4 \cos 4z + \frac{1}{7} r^6 \cos 6z + \dots \end{aligned}$$

und wenn man $\frac{\pi}{2} - z$ für z setzt:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2r} [\varphi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \varphi(-r, \frac{\pi}{2} - z)] \sin z + \frac{1}{2r} [\psi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \psi(-r, \frac{\pi}{2} - z)] \cos z \\ & = 1 - \frac{1}{3} r^2 \cos 2z + \frac{1}{5} r^4 \cos 4z - \frac{1}{7} r^6 \cos 6z + \dots \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Für $r = e^{-x}$ hat man sogleich die erste der beiden Reihen in (79).

Ferner hat man vermöge der Bedeutung der Funktionen φ und ψ leicht die Gleichung

$$\varphi(r, z) \cos z - \psi(r, z) \sin z = r \cos 2z - \frac{1}{2} r^2 \cos 3z + \frac{1}{3} r^3 \cos 4z - \frac{1}{4} r^4 \cos 5z + \dots$$

und für negative r :

$$\varphi(-r, z) \cos z - \psi(-r, z) \sin z = -r \cos 2z - \frac{1}{2} r^2 \cos 3z - \frac{1}{3} r^3 \cos 4z - \frac{1}{4} r^4 \cos 5z - \dots,$$

woraus durch Subtraktion und Multiplikation mit $\frac{r}{2}$ folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2} [\varphi(r, z) - \varphi(-r, z)] \cos z - \frac{r}{2} [\psi(r, z) - \psi(-r, z)] \sin z \\ & = r^2 \cos 2z + \frac{1}{3} r^4 \cos 4z + \frac{1}{5} r^6 \cos 6z + \dots \end{aligned}$$

oder, wenn man $\frac{\pi}{2} - z$ für z schreibt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{2} \left[\varphi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \varphi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \sin z - \frac{r}{2} \left[\psi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \psi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \cos z \\ = -r^2 \cos 2z + \frac{1}{3} r^4 \cos 4z - \frac{1}{5} r^6 \cos 6z + \dots \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

eine Reihe, welche negativ genommen für $r = e^{-x}$ in die zweite der Reihen (79) übergeht. Zieht man endlich (81) von (80) ab, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right) \left[\varphi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \varphi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \sin z + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right) \left[\psi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \psi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \cos z \\ = 1 - \frac{1}{3} r^2 \cos 2z + \frac{1}{5} r^4 \cos 4z - \frac{1}{7} r^6 \cos 6z + \dots \\ + r^2 \cos 2z - \frac{1}{3} r^4 \cos 4z + \frac{1}{5} r^6 \cos 6z - \dots \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Vermöge der Werthe von $\varphi(r, z)$, $\psi(r, z)$ und durch Anwendung der Formeln

$$1z - 1\beta = 1\frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{Arctan } \alpha + \text{Arctan } \beta = \text{Arctan } \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}$$

findet man leicht

$$\begin{aligned} \varphi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \varphi(-r, \frac{\pi}{2} - z) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 2r \sin z + r^2}{1 - 2r \sin z + r^2} \\ \psi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \psi(-r, \frac{\pi}{2} - z) &= \text{Arctan } \frac{2 \cos z}{\frac{1}{r} - r} \end{aligned}$$

Setzt man endlich $r = e^{-x}$ und bemerkt, daß dann die Doppelreihe (82) mit der (79), d. h. mit der rechten Seite der Gleichung (78) identisch wird, so hat man jetzt das Integral:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos z + \int_{\frac{\pi}{2} e^{-\frac{x}{2}}}^{\frac{\pi}{2} e^{\frac{x}{2}}} \frac{e^{\frac{x\theta}{2}} + e^{-\frac{x\theta}{2}}}{e^{\frac{x\theta}{2}} - e^{-\frac{x\theta}{2}}} \cdot \frac{\sin x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ = \frac{1}{4} (e^x - e^{-x}) \sin z \cdot \ln \frac{e^x + 2 \sin z + e^{-x}}{e^{-x} - 2 \sin z + e^x} + \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \cos z \cdot \text{Arctan } \frac{2 \cos z}{e^x - e^{-x}} \end{aligned} \right\} \frac{\pi}{2} \geq \geq 0. \quad (85)$$

Spezielle Fälle dieser Gleichung sind folgende:

Für $z = 0$:

$$\frac{\pi}{2} e^{-x} + 2 \int_{\frac{\pi}{2} e^{-\frac{x}{2}}}^{\frac{\pi}{2} e^{\frac{x}{2}}} \frac{\sin x\theta}{e^{\frac{x\theta}{2}} - e^{-\frac{x\theta}{2}}} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \text{Arctan } \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

oder wenn man bemerkt, daß der Arctan rechts $= 2 \text{Arctan } e^{-x}$ ist:

$$2 \int_{\frac{\pi}{2} e^{-\frac{x}{2}}}^{\frac{\pi}{2} e^{\frac{x}{2}}} \frac{\sin x\theta}{e^{\frac{x\theta}{2}} - e^{-\frac{x\theta}{2}}} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} = (e^x + e^{-x}) \text{Arctan } e^{-x} - \frac{\pi}{2} e^{-x}. \quad (84)$$

Ferner für $z = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{\frac{\pi}{2} e^{-\frac{x}{2}}}^{\frac{\pi}{2} e^{\frac{x}{2}}} \frac{e^{\frac{x\theta}{2}} + e^{-\frac{x\theta}{2}}}{e^{\frac{x\theta}{2}} - e^{-\frac{x\theta}{2}}} \cdot \frac{\sin x\theta}{1 + \theta^2} d\theta = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \ln \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \quad (85)$$

Addirt man zu dieser Formel die vorhergehenden und zieht sie auch davon ab, so erhält man nach leichter Reduktion noch die folgenden Integrale:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{2} e^{-x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{\pi}{4}\theta} + e^{-\frac{\pi}{4}\theta}}{e^{\frac{\pi}{4}\theta} - e^{-\frac{\pi}{4}\theta}} \cdot \frac{\sin x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} + (e^x + e^{-x}) \operatorname{Arctan} e^{-x} \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{2} e^{+x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{\pi}{4}\theta} - e^{-\frac{\pi}{4}\theta}}{e^{\frac{\pi}{4}\theta} + e^{-\frac{\pi}{4}\theta}} \cdot \frac{\sin x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} + (e^x + e^{-x}) \operatorname{Arctan} e^{+x} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Nimmt man endlich in Formel (83) $z = \frac{\pi}{4}$, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\theta}{e^{\frac{\pi}{4}\theta} - e^{-\frac{\pi}{4}\theta}} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} (e^x - e^{-x}) \cdot \frac{e^x + \sqrt{2} + e^{-x}}{e^x - \sqrt{2} + e^{-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} (e^x + e^{-x}) \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{2}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Man kann auch die Formel (83) partiell nach x differenzieren und findet dann das Resultat:

$$\left. \begin{aligned} & 1 - \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos z + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{z}{2}\theta} + e^{-\frac{z}{2}\theta}}{e^{\frac{\pi}{2}\theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\theta}} \cdot \frac{\theta \cos x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} (e^x + e^{-x}) \sin z \cdot \frac{e^x + 2 \sin z + e^{-x}}{e^x - 2 \sin z + e^{-x}} + \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \cos z \cdot \operatorname{Arctan} \frac{2 \cos z}{e^x - e^{-x}} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

welches sich auf ähnliche Weise wie das Integral (83) für verschiedene Werthe von $z = 0$ bis $z = \frac{\pi}{2}$ spezialisiren ließe, wobei wir uns nicht aufhalten wollen. Dagegen können wir jetzt $x = 0$ nehmen, ohne, wie in (83) auf die identische Gleichung $\frac{\pi}{2} \cos z = \frac{\pi}{2} \cos z$ zu kommen; wir erhalten nämlich

$$1 - \frac{\pi}{2} \cos z + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\frac{z}{2}\theta} + e^{-\frac{z}{2}\theta}}{e^{\frac{\pi}{2}\theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\theta}} \cdot \frac{\theta \cos x\theta}{1 + \theta^2} d\theta = \frac{1}{2} \sin z \cdot \frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} \quad (90)$$

und daraus für $z = 0$ und $z = \frac{\pi}{4}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta}{e^{\frac{\pi}{2}\theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\theta}} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad (91)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta}{e^{\frac{\pi}{4}\theta} - e^{-\frac{\pi}{4}\theta}} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \quad (92)$$

§. 8.

Wir haben für die Formel (72) noch den Fall zu betrachten, in welchem die GröÙe μ eine positive ganze Zahl ist. Die aus (75) entspringenden Reihen lassen sich aber für jede beliebige ganze Zahl μ ebenso wenig summiren, als die Reihe (77) für jedes gebrochene μ ; und wir müssen daher, um für y einen geschlossenen Ausdruck zu erhalten, uns mit einem speziellen Werthe von μ begnügen. Ein solcher ist $\mu = 1$, wodurch man nach Formel (75) erhält:

$$y = -\frac{x}{2} e^{-x} \cos z + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} e^{-x} \cos z + \frac{1}{3} e^{-2x} \cos 2z - \frac{1}{4} e^{-3x} \cos 3z + \dots \right. \\ \left. - \frac{1}{1} e^{-2x} \cos 2z + \frac{1}{2} e^{-3x} \cos 3z - \dots \right] + Ae^x + Be^{-x} \quad (93)$$

Um die Summe der eingeklammerten Doppelreihe zu finden, erinnern wir an zwei Formeln des vorigen Paragraphen, nämlich

$$\varphi(r, z) \cos z + \psi(r, z) \sin z = r - \frac{1}{2} r^2 \cos z + \frac{1}{3} r^3 \cos 2z - \frac{1}{4} r^4 \cos 3z + \dots \\ \varphi(r, z) \cos z - \psi(r, z) \sin z = r \cos 2z - \frac{1}{2} r^2 \cos 3z + \frac{1}{3} r^3 \cos 4z - \dots$$

Multipliziert man die erste Reihe mit $\frac{1}{r}$, die zweite mit r und zieht diese von jener ab, so ergibt sich

$$\left(\frac{1}{r} - r \right) \cos z \cdot \varphi(r, z) + \left(\frac{1}{r} + r \right) \sin z \cdot \psi(r, z) \\ = 1 - \frac{1}{2} r \cos z + \frac{1}{3} r^2 \cos 2z - \frac{1}{4} r^3 \cos 3z + \frac{1}{5} r^4 \cos 4z - \dots \\ - \frac{1}{1} r^2 \cos 2z + \frac{1}{2} r^3 \cos 3z - \frac{1}{3} r^4 \cos 4z + \dots,$$

wobei die rechte Seite für $r = e^{-x}$ in die zu summirende Doppelreihe (93) übergeht. Substituiren wir die Werthe von $\varphi(r, z)$ und $\psi(r, z)$, so wird

$$y = -\frac{x}{2} e^{-x} \cos z + Ae^x + Be^{-x} \\ + \frac{1}{4} \left(e^x - e^{-x} \right) \cos z \cdot \left(1 - 2e^{-x} \cos z + e^{-2x} \right) + \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right) \sin z \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sin z}{e^x + \cos z} \quad (94)$$

Um die Constanten A und B zu bestimmen, gehen wir in beiden Werthen von y zur Gränze für wachsende $x = 2n + 1$ über; es ist dann nach Formel (72) [wo jetzt $\mu = 1$ genommen werden muß] durch Zusetzung des Faktors $\frac{\sin \theta}{\sin \theta}$:

$$\lim y = \lim \int_0^\infty \frac{\sin (2n+1)\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{e^{\frac{z\theta}{2}} - e^{-\frac{z\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{z\theta}{2}} + e^{-\frac{z\theta}{2}}}{1 + \theta^2} d\theta.$$

Diese Lim. bestimmt man leicht nach (29) in I., und findet $\lim y = \frac{1}{2}$. Ferner ist in (93)

$$\lim y = -\frac{1}{2} \lim \left[(2n+1) e^{-(2n+1)} \right] + \frac{1}{2} + A \lim e^{2n+1}, \text{ oder weil, wie man ohne Schwierigkeit}$$

entdeckt, die erste $\lim = 0$ ist, $\lim y = \frac{1}{2} + A \lim e^{2n+1}$, woraus im Vergleich mit dem früheren Werthe von $\lim y$, $A = 0$ folgt.

Die Gleichung (94) muß sich auch für $x = 0$ annulliren, und daraus folgt, weil schon $A = 0$ ist, $B = -\frac{z}{2} \sin z$. Wir haben also, uns an die Bedeutung von y erinnernd:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} (x \cos z + z \sin z) e^{-x} + \int_0^\infty \frac{e^{\frac{z\theta}{2}} + e^{-\frac{z\theta}{2}}}{e^{\frac{z\theta}{2}} - e^{-\frac{z\theta}{2}}} \cdot \frac{\sin x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ & = \frac{1}{4} (e^x - e^{-x}) \cos z + \frac{1}{2} (1 + 2e^{-x} \cos z + e^{-2x}) + \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \sin z \operatorname{Arctan} \frac{\sin z}{e^x + \cos z} \end{aligned} \right\} \pi \geq z \geq 0. \quad (95)$$

Daraus lassen sich leicht für $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$, $z = \pi$ neue Formeln ableiten, die man wieder durch Addition und Subtraktion zu neuen Resultaten combiniren kann; eine Rechnung, die ganz der im vorigen Paragraphen geführten analog und daher überflüssig ist.

Man wird leicht bemerken, daß die im vorigen und diesem Paragraphen entwickelten Formeln eine große Analogie zu den im §. 4. entwickelten besitzen. So geht z. B. das bestimmte Integral (47) in das (91) über, wenn man dort $\alpha = 1$, $\omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}$ nimmt; dagegen geht aber der Werth des ersten Integrales unter jenen Substitutionen nicht in den des zweiten über und man kann daher den Werth des Integrales (91) nicht aus dem von (47) ableiten. Dieses Beispiel zeigt, wie vorsichtig man beim Gebrauch imaginärer Größen sein muß.

§. 9.

Wir wollen uns noch mit einem der Formel (72) ganz analogen Integrale beschäftigen, nämlich dem folgenden:

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{\frac{z\theta}{2}} - e^{-\frac{z\theta}{2}}}{e^{\frac{z\theta}{2}} + e^{-\frac{z\theta}{2}}} \cdot \frac{\cos x\theta}{\mu^2 + \theta^2} d\theta. \quad (96)$$

Durch partielle Differenziation nach x findet man leicht

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \mu^2 y = - \int_0^\infty \frac{e^{\frac{z\theta}{2}} - e^{-\frac{z\theta}{2}}}{e^{\frac{z\theta}{2}} + e^{-\frac{z\theta}{2}}} \cdot \frac{\theta^2 + \mu^2}{\mu^2 + \theta^2} \cos x\theta d\theta.$$

Das Integral rechts ist mit dem in (65) gefundenen identisch, wenn man sich nur x durch ω ersetzt denkt; schreiben wir zugleich statt der rechten Seite in (65) die Reihe, durch deren Summirung eben jener Ausdruck gefunden wurde, so haben wir

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \mu^2 y = - \left\{ e^{-x} \sin z - e^{-2x} \sin 2z + e^{-3x} \sin 3z - \dots \right\}$$

Zur Integration dieser Differenzialgleichung bedienen wir uns der Formel (74), in welcher wieder $\lambda_1 = +\mu$, $\lambda_2 = -\mu$ und für $\varphi(x)$ die rechte Seite der vorstehenden Gleichung zu setzen ist. Wir haben so:

$$y = - \frac{e^{\mu x}}{2\mu} \int \left\{ e^{-(1+\mu)x} \sin z - e^{-(2+\mu)x} \sin 2z + e^{-(3+\mu)x} \sin 3z - \dots \right\} dx \\ + \frac{e^{-\mu x}}{2\mu} \int \left\{ e^{-(1-\mu)x} \sin z - e^{-(2-\mu)x} \sin 2z + e^{-(3-\mu)x} \sin 3z - \dots \right\} dx \\ + Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \quad (97)$$

wobei z innerhalb des Intervalles 0 und bis π bleiben muß, weil nur dann die Formel (65) richtig ist.

I. Lassen wir $\mu < 1$ sein, so giebt die Ausführung der beiden Integrationen

$$y = \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{e^{-x} \sin z}{1+\mu} - \frac{e^{-2x} \sin 2z}{2+\mu} + \frac{e^{-3x} \sin 3z}{3+\mu} - \dots \right\} \\ - \frac{1}{2\mu} \left\{ \frac{e^{-x} \sin z}{1-\mu} - \frac{e^{-2x} \sin 2z}{2-\mu} + \frac{e^{-3x} \sin 3z}{3-\mu} - \dots \right\} \\ + Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

oder

$$y = - \left\{ \frac{e^{-x} \sin z}{1^2 - \mu^2} - \frac{e^{-2x} \sin 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{e^{-3x} \sin 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots \right\} \\ + Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} \quad (98)$$

Die Constanten A und B finden sich auf folgende Weise. Man nehme $x =$ einer ungeraden Zahl $2n+1$, und gehe zur Gränze für wachsende n über, so können wir schreiben:

$$\text{Lim } y = \text{Lim} \int_0^\infty \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos \theta} \cdot \frac{e^{-z\theta} - e^{-\pi\theta}}{e^{-\pi\theta} - e^{-\theta}} \cdot \frac{\cos \theta d\theta}{\mu^2 + \theta^2},$$

wobei die gesuchte Lim. sich nach Formel (55), I. bestimmen läßt. Sie besteht aus den Gliedern $f\left(\frac{1}{2}\pi\right)$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$, $f\left(\frac{5}{2}\pi\right)$ etc., wobei

$$f(\theta) = \frac{e^{-z\theta} - e^{-\pi\theta}}{e^{-\pi\theta} - e^{-\theta}} \cdot \frac{\cos \theta}{\mu^2 + \theta^2}$$

genommen werden muß. Diese Größen sind sämtlich $= 0$, also $\text{Lim } y = 0$.

Gehen wir auch in Formel (98) zur Gränze für wachsende $x = 2n+1$ über, so bleibt $\text{Lim } y = A \text{ Lim } e^{\mu(2n+1)}$, was nur dann mit dem vorhergefundenen Resultate übereinstimmen kann, wenn $A = 0$ ist.

Ferner differenziere man den Ausdruck (98) (in welchem nun $A = 0$) nach x und ebenso das Integral (96), so wird

$$= \frac{e^{-x} \sin z}{1^2 - \mu^2} - \frac{2 e^{-2x} \sin 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{3 e^{-3x} \sin 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots - \mu B e^{-\mu x}.$$

Für $x = 0$ müssen beide Seiten der Gleichung sich annulliren, woraus folgt

$$\mu B = \frac{\sin z}{1^2 - \mu^2} - \frac{2 \sin 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{3 \sin 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots$$

Da nach einer früheren Bemerkung $\pi > z > 0$ ist, so können wir die Formel (65) in I. anwenden, wodurch wir $B = \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{\sin \mu z}{\sin \mu \pi}$ erhalten.

Durch Substitution der Werthe von A, B, y in die Gleichung (98) ergibt sich jetzt das Resultat:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{e^{-z\theta} - e^{-x\theta}}{\pi\theta} \cdot \frac{\cos x\theta}{\mu^2 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{\pi e^{-\mu x} \sin \mu z}{2\mu \sin \mu \pi} - \left\{ \frac{e^{-x} \sin z}{1^2 - \mu^2} - \frac{2 e^{-2x} \sin 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{3 e^{-3x} \sin 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \pi > z > 0. \quad (99)$$

Die eingeklammerte Reihe auf der rechten Seite ist allgemein nicht durch die gewöhnlichen Funktionen summirbar; nur in einem Falle für $\mu = \frac{1}{2}$ läßt sie sich durch Logarithmen und Kreisfunktionen summiren. Für diesen Fall haben wir

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{e^{-z\theta} - e^{-x\theta}}{\pi\theta} \cdot \frac{\cos x\theta}{\frac{1}{4} + \theta^2} d\theta \\ &= \pi e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}z - 4 \left\{ \frac{e^{-x} \sin z}{1 \cdot 3} - \frac{2 e^{-2x} \sin 2z}{3 \cdot 5} + \frac{3 e^{-3x} \sin 3z}{5 \cdot 7} - \dots \right\} \end{aligned}$$

oder, wenn wir $\frac{1}{2}\theta$ für θ , $2x$, $2z$ für x und z setzen, so daß für das neue z die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelten:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{e^{-z\theta} - e^{-x\theta}}{\pi\theta} \cdot \frac{\cos x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-x} \sin z - \left\{ \frac{2 e^{-2x} \sin 2z}{1 \cdot 3} - \frac{2 e^{-4x} \sin 4z}{3 \cdot 5} + \frac{2 e^{-6x} \sin 6z}{5 \cdot 7} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \frac{\pi}{2} > z > 0. \quad (100)$$

Die eingeklammerte Reihe läßt sich auch so schreiben:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{1} e^{-2x} \sin 2z - \frac{1}{3} e^{-4x} \sin 4z + \frac{1}{5} e^{-6x} \sin 6z - \dots \\ & - \frac{1}{3} e^{-2x} \sin 2z + \frac{1}{5} e^{-4x} \sin 4z - \frac{1}{7} e^{-6x} \sin 6z + \dots \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

und die Summe dieser Doppelreihe findet sich auf folgende Weise. Man hat für $+1 \geq r \geq -1$ die Reihen

$$\frac{1}{2} (1 + 2r \cos z + r^2) = r \cos z - \frac{1}{2} r^2 \cos 2z + \frac{1}{3} r^3 \cos 3z - \dots$$

$$\operatorname{Arctan} \frac{r \sin z}{1 + r \cos z} = r \sin z - \frac{1}{2} r^2 \sin 2z + \frac{1}{3} r^3 \sin 3z - \dots$$

wobei wir wie früher die linken Seiten mit $\varphi(r, z)$ und $\psi(r, z)$ bezeichnen wollen. Man findet nun leicht

$$\varphi(r, z) \sin z + \psi(r, z) \cos z = r \sin 2z - \frac{1}{2} r^2 \sin 3z + \frac{1}{3} r^3 \sin 4z - \dots$$

Denkt man sich diese Gleichung auch für negative z hingeschrieben, von der vorstehenden subtrahiert und mit $\frac{r}{2}$ beiderseits multipliziert, so wird

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} [\varphi(r, z) - \varphi(-r, z)] \sin z + \frac{r}{2} [\psi(r, z) - \psi(-r, z)] \cos z \\ = r^2 \sin 2z + \frac{1}{3} r^4 \sin 4z + \frac{1}{5} r^6 \sin 6z + \dots \end{aligned}$$

und wenn man $\frac{\pi}{2} - z$ für z schreibt:

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} \left[\varphi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \varphi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \cos z + \frac{r}{2} \left[\psi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \psi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \sin z \\ = r^2 \sin 2z - \frac{1}{3} r^4 \sin 4z + \frac{1}{5} r^6 \sin 6z - \dots \end{aligned} \quad (102)$$

Ferner hat man vermöge der Bedeutung von $\varphi(r, z)$ und $\psi(r, z)$:

$$\varphi(r, z) \sin z - \psi(r, z) \cos z = \frac{1}{2} r^2 \sin z - \frac{1}{3} r^3 \sin 2z + \frac{1}{4} r^4 \sin 3z - \dots$$

Denkt man sich diese Gleichung auch für negative r hingeschrieben, von der vorstehenden subtrahiert und beide Seiten dann mit $\frac{1}{2r}$ multipliziert, so wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r} [\varphi(r, z) - \varphi(-r, z)] \sin z - \frac{1}{2r} [\psi(r, z) - \psi(-r, z)] \cos z \\ = -\frac{1}{3} r^2 \sin 2z - \frac{1}{5} r^4 \sin 4z - \frac{1}{7} r^6 \sin 6z - \dots \end{aligned}$$

und wenn man $\frac{\pi}{2} - z$ für z schreibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r} \left[\varphi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \varphi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \cos z - \frac{1}{2r} \left[\psi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \psi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \sin z \\ = -\frac{1}{3} r^2 \sin 2z + \frac{1}{5} r^4 \sin 4z - \frac{1}{7} r^6 \sin 6z + \dots \end{aligned}$$

Addiert man zu dieser Gleichung die Formel (102), so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + r \right) \left[\varphi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \varphi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \cos z - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - r \right) \left[\psi(r, \frac{\pi}{2} - z) - \psi(-r, \frac{\pi}{2} - z) \right] \sin z \\ = \frac{1}{1} r^2 \sin 2z - \frac{1}{3} r^4 \sin 4z + \frac{1}{5} r^6 \sin 6z - \dots \\ - \frac{1}{3} r^2 \sin 2z + \frac{1}{5} r^4 \sin 4z - \frac{1}{7} r^6 \sin 6z + \dots \end{aligned}$$

und diese Doppelreihe geht in die von (101) über, sobald man $r = e^x$ setzt.

Vermöge der Bedeutung von $\varphi(r, z)$ und $\psi(r, z)$ haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\frac{\pi}{2}\theta - \frac{\pi}{2}\theta} \cdot \frac{\cos x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ = \frac{\pi}{2} e^{-x} \sin z - \frac{1}{4} (e^x + e^{-x}) \cos z \cdot \frac{e^x + 2 \sin z + e^{-x}}{e^x - 2 \sin z + e^{-x}} + \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \sin z \cdot \operatorname{Arctan} \frac{2 \cos z}{e^x - e^{-x}} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{2} > z > 0. \\ & (105) \end{aligned} \right\}$$

Daraus fließen als spezielle Fälle die folgenden Integrale:

Für $x = 0$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\pi\theta - \pi\theta} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} = \frac{\pi}{2} \sin z - \frac{1}{2} \cos z \cdot \frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}, \quad \frac{\pi}{2} > z > 0. \quad (104)$$

und noch für $z = \frac{\pi}{4}$, welches die Bedingung $\frac{\pi}{2} > z > 0$ erfüllt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}\theta} + e^{-\frac{\pi}{4}\theta}} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \pi - \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right\}. \quad (105)$$

II. Wir nehmen μ gleich einer ganzen Zahl und zwar speziell $= 1$, weil sonst das Integral unter geschlossener Form nicht darstellbar sein würde.

Man erhält sogleich aus Formel (99) für y den folgenden Werth:

$$y = \frac{x}{2} e^{-x} \sin z + A e^x + B e^{-x} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-x} \sin z}{2} - \frac{e^{-2x} \sin 2z}{3} + \frac{e^{-3x} \sin 3z}{4} - \dots + \frac{e^{-2x} \sin 2z}{1} - \frac{e^{-3x} \sin 3z}{2} + \dots \right] \quad (106)$$

Für die Summirung der eingeklammerten Doppelreihe erinnern wir an die beiden vorhingefundenen Formeln

$$\varphi(r, z) \sin z - \psi(r, z) \cos z = \frac{1}{2} r^2 \sin z - \frac{1}{3} r^3 \sin 2z + \frac{1}{4} r^4 \sin 3z - \dots$$

$$\varphi(r, z) \sin z + \psi(r, z) \cos z = \frac{1}{1} r \sin 2z - \frac{1}{2} r^2 \sin 3z + \dots$$

Addirt man dieselben, nachdem die erste mit $\frac{1}{r}$, die zweite mit r multipliziert worden ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r} + r \right) \varphi(r, z) \sin z - \left(\frac{1}{r} - r \right) \psi(r, z) \cos z \\ &= \frac{1}{2} r \sin z - \frac{1}{3} r^2 \sin 2z + \frac{1}{4} r^3 \sin 3z - \dots \\ & \quad + \frac{1}{1} r^2 \sin 2z - \frac{1}{2} r^3 \sin 3z + \dots, \end{aligned}$$

woraus man für $r = e^{-x}$ die Summe der obigen Doppelreihe erhält.

Setzt man noch die Werthe von $\varphi(r, z)$ und $\psi(r, z)$ ein, so wird jetzt

$$y = \frac{x}{2} e^{-x} \sin z + A e^x + B e^{-x} + \frac{1}{4} \left(e^x + e^{-x} \right) \sin z \cdot \left(1 + 2e^{-x} \cos z + e^{-2x} \right) - \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right) \cos z \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sin z}{e^x + \cos z} \quad (107)$$

wobei noch die Constanten A und B zu bestimmen sind. Zuerst überzeugt man sich leicht mittelst des Theoremes (35), daß der Ausdruck

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\pi\theta - \pi\theta} \cdot \frac{\cos x\theta}{1 + \theta^2} d\theta$$

für wachsende $x = 2n + 1$ sich unbegrenzt der Null nähert. Damit dies auch in (107) oder was dasselbe ist, in Formel (106) der Fall sei, muß Λ der Null gleich sein.

Ferner giebt der vorliegende Ausdruck nach x differenziert:

$$\frac{dy}{dx} = - \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{z\theta}{e}} - e^{-\frac{z\theta}{e}}}{\pi\theta - \frac{\pi\theta}{e}} \cdot \frac{\theta \sin x\theta}{1 + \theta^2} d\theta$$

und ebenso die Formel (106), wenn wir erst die Doppelreihe in eine einfache zusammenziehen und bemerken, daß $\Lambda = 0$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{-x} - \frac{x}{e} \right) \sin z - B e^{-x} - \left\{ \frac{e^{-x}}{4} \sin z + \frac{2e^{-2x}}{1 \cdot 3} \sin 2z - \frac{3e^{-3x}}{2 \cdot 4} \sin 3z + \dots \right\}$$

Da nun dieser Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$ sich annulliren muß, weil das Integral für $\frac{dy}{dx}$ diese Eigenschaft besitzt, so folgt

$$B = \frac{\sin z}{4} - \frac{2 \sin 2z}{1 \cdot 3} + \frac{3 \sin 3z}{2 \cdot 4} - \dots$$

wobei sich die rechte Seite nach Formel (66) in I. summiren läßt. Man hat nämlich $B = -\frac{z}{2} \cos z$ und daraus folgt jetzt nach (107):

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{z\theta}{e}} - e^{-\frac{z\theta}{e}}}{\pi\theta - \frac{\pi\theta}{e}} \cdot \frac{\cos x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} (x \sin z - z \cos z) e^{-x} \\ &+ \frac{1}{4} \left(e^x + e^{-x} \right) \sin z \cdot (1 + 2e^{-x} \cos z + e^{-2x}) - \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \cos z \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sin z}{e^x + \cos z} \end{aligned} \right\} \frac{\pi}{2} > z > 0. \quad (108)$$

Als spezielle Fälle dieser Formel sind bemerkenswerth:

für $x = 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{z\theta}{e}} - e^{-\frac{z\theta}{e}}}{\pi\theta - \frac{\pi\theta}{e}} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} = -\frac{z}{2} \cos z + \frac{1}{2} \sin z \cdot (1 + \cos z) + \frac{1}{2} \sin z \cdot l_2, \quad \frac{\pi}{2} > z > 0, \quad (109)$$

und noch für $z = \frac{\pi}{2}$, welches die Bedingung $\pi > z > 0$ erfüllt:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2}\theta + e^{\frac{\pi}{2}\theta}} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} = \frac{1}{2} l_2.$$

Es gilt hier eine ähnliche Bemerkung, wie sie am Ende des §. 8. gemacht worden ist. Vergleicht man nämlich mit der vorstehenden Gleichung die früher gefundene (49), so erhellt, daß dort das Integral für $\alpha = 1$, $\omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}$ in das vorstehende übergeht, ohne daß aber der Werth jenes Integrales sich in den Werth des obigen verwandelt.

III.

Ueber verschiedene bestimmte Integrale, deren Werthe durch doppelte Integrationen gefunden werden.

§. 1.

Ein bekannter Satz von doppelten Integralen mit zwei Veränderlichen zwischen bestimmten Gränzen sagt, daß es gleichgültig ist, in welcher Ordnung die Integrationen verrichtet werden. Bedeutet daher $f(x, y)$ eine beliebige Funktion von x und y , sind ferner a, b die Gränzwerte für x , a', b' die für y , so hat man

$$\int_{a'}^{b'} dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_{a'}^{b'} f(x, y) dy. \quad (1)$$

Dieses Theorem ist deshalb von Wichtigkeit, weil man das fragliche Doppelintegral von zwei verschiedenen Seiten kennen lernt und so zu Gleichungen gelangt, die man auf anderem Wege nicht leicht gefunden haben würde. In vielen Fällen kann man bei der einen Ordnung, in welcher man integriert, eine Integration ausführen, so daß noch eine übrig bleibt, und bei der Integration in umgekehrter Ordnung beide Integrale auffinden, was dann zur unmittelbaren Kenntniss eines bestimmten Integrales (des vorher übrig gebliebenen) verhilft; in anderen Fällen dagegen kann man sowohl bei der einen als bei der anderen Ordnung der Integrationen immer nur ein Integral ausführen, das zu einer Gleichung zwischen zwei bestimmten Integralen verhilft, aus der sich dann noch anderweite Resultate ableiten lassen.

§. 2.

Vermöge der bekannten Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (2)$$

ergiebt sich augenblicklich

$$\int_0^\pi \cos my dy \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos yx dx = \alpha \int_0^\pi \cos my dy \cdot \frac{1}{\alpha^2 + y^2}. \quad (3)$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich, wenn man erst nach y integrieren will, auch so darstellen:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \int_0^\pi \cos my \cos xy dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \left\{ \frac{\sin (m+x) \pi}{m+x} + \frac{\sin (m-x) \pi}{m-x} \right\},$$

welcher Ausdruck, vorausgesetzt daß m eine ganze positive Zahl ist, sich in den folgenden verwandelt:

$$\cos m\pi \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x^2 - m^2} dx \cdot \frac{x \sin \pi x}{x^2 - m^2} = (-1)^m \int_0^\infty \frac{x \sin \pi x}{x^2 - m^2} e^{-\alpha x} dx.$$

Durch Vergleichung dieses Werthes mit dem in (3) ergibt sich

$$\alpha \int_0^\pi \frac{\cos my}{\alpha^2 + y^2} dy = (-1)^m \int_0^\infty \frac{x \sin \pi x}{x^2 - m^2} e^{-\alpha x} dx. \quad (4)$$

Eine ähnliche Gleichung entspringt durch folgende Rechnung. Nach der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x^2 + \beta^2} \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (5)$$

ist offenbar

$$\int_0^\pi \sin my dy \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x^2 + y^2} \sin yx dx = \int_0^\pi \sin my dy \cdot \frac{y}{\alpha^2 + y^2} \quad (6)$$

Kehrt man aber auf der linken Seite die Ordnung der Integrationen um, so wird dieselbe

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x^2 + y^2} dx \int_0^\pi \sin my \sin xy dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x^2 + y^2} dx \left\{ \frac{\sin (x - m) \pi}{x - m} - \frac{\sin (x + m) \pi}{x + m} \right\}$$

oder für ganze positive m :

$$= m \cos m\pi \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x^2 - m^2} dx \cdot \frac{\sin \pi x}{x^2 - m^2} = (-1)^m \cdot m \int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x^2 - m^2} e^{-\alpha x} dx,$$

woraus sich durch Vergleichung mit (6) ergibt:

$$\int_0^\pi \frac{y \sin my}{\alpha^2 + y^2} dy = (-1)^m \cdot m \int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x^2 - m^2} e^{-\alpha x} dx. \quad (7)$$

Für $x = \frac{m}{\pi} z$ gehen die beiden Gleichungen (4) und (7) in die folgenden über:

$$\alpha \int_0^\pi \frac{\cos mv}{\alpha^2 + y^2} dy = (-1)^m \int_0^\infty \frac{z \sin mz}{z^2 - \pi^2} e^{-\frac{m}{\pi} \alpha z} dz$$

$$\int_0^\pi \frac{y \sin my}{\alpha^2 + y^2} dy = (-1)^m \pi \int_0^\infty \frac{\sin mz}{z^2 - \pi^2} e^{-\frac{m}{\pi} \alpha z} dz$$

und wenn man $\alpha\pi$ für α , x für y und z setzt:

$$\alpha\pi \int_0^\pi \frac{\cos mx}{(\alpha\pi)^2 + x^2} dx = (-1)^m \int_0^\infty \frac{x \sin mx}{x^2 - \pi^2} e^{-mx} dx \quad (8)$$

$$\int_0^\pi \frac{x \sin mx}{(\alpha\pi)^2 + x^2} dx = (-1)^m \pi \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x^2 - \pi^2} e^{-mx} dx. \quad (9)$$

§. 3.

Diese Gleichungen können selbst wieder zur Auffindung von bestimmten Integralen mit aufgebbaren Werthen benützt werden.

deren Werthe durch doppelte Integrationen gefunden werden.

67

Man nehme z. B. in Formel (8) $m = 1, 2, 3, \dots, n$, und addire alle so entstehenden Glieder; auf der linken Seite erscheint dann unter dem Integralzeichen die Reihe $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$,

für die wir ihre Summe $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin (2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ setzen, so daß also wird:

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{2} \alpha \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha \pi)^2 + x^2} + \frac{1}{2} \alpha \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin (2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{(\alpha \pi)^2 + x^2} \\ & = -\int_0^{\infty} \left\{ e^{-\alpha x} \sin x - e^{-2\alpha x} \sin 2x + e^{-3\alpha x} \sin 3x - \dots + (-1)^{n-1} e^{-n\alpha x} \sin nx \right\} \frac{x dx}{x^2 - \pi^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Das erste Integral auf der linken Seite läßt sich leicht ausführen und giebt $\text{Arctan} \frac{1}{\alpha}$. Gehen wir ferner zur Gränze für wachsende n über und setzen im zweiten Integral links $x = 2\theta$, so wird

$$\frac{1}{2} \alpha \pi \lim \int_0^{\pi} \frac{\sin (2n+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{(\alpha \pi)^2 + x^2} = \alpha \pi \lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n+1) \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{d\theta}{(\alpha \pi)^2 + 4\theta^2} = \frac{1}{2\alpha},$$

indem wir gleich den Satz (14) in I. angewendet haben. Die unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite stehende Reihe wird jetzt unendlich und nach Formel (2) in II. summierbar, wenn man x für z und $r = e^{-\alpha x}$ setzt.

Man erhält nun überhaupt

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^{\alpha x} + 2 \cos x + e^{-\alpha x}} \cdot \frac{x dx}{x^2 - \pi^2} = \frac{1}{2} \text{Arctan} \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha}. \quad (11)$$

Ebenso setze man in der Gleichung (8) $m = 1, 2, 3, \dots, n$ und nehme alle so entstehenden Glieder mit wechselnden Zeichen zusammen. Unter dem Integralzeichen links steht dann die Reihe

$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots - \cos nx$, für welche wir gleich ihre Summe $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos (2n+1) \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$ schreiben wollen.

Es ist jetzt

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{1}{2} \alpha \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha \pi)^2 + x^2} - \frac{1}{2} \alpha \pi \int_0^{\pi} \frac{\cos (2n+1) \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{(\alpha \pi)^2 + x^2} \\ & = -\int_0^{\infty} \left\{ e^{-\alpha x} \sin x + e^{-2\alpha x} \sin 2x + e^{-3\alpha x} \sin 3x + \dots + e^{-n\alpha x} \sin nx \right\} \frac{x dx}{x^2 - \pi^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Das erste Integral links giebt ausgeführt den Werth $\frac{1}{2} \text{Arctan} \frac{1}{\alpha}$.

Gehen wir noch zur Gränze für wachsende n über und nehmen im zweiten Integral links $x = 2\theta$, so wird

$$-\frac{1}{2} \alpha \pi \lim \int_0^\pi \frac{\cos (2n+1) \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{(\alpha\pi)^2 + x^2} = -\alpha \pi \lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos (2n+1) \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{d\theta}{(\alpha\pi)^2 + (2\theta)^2}.$$

Nach Formel (33) in I. findet man, daß diese $\lim. = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(\alpha\pi)^2 + \pi^2}$, also $-\alpha\pi$ mit dieser $\lim.$ multipliziert, $-\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}$ giebt. Summiren wir ferner die unter dem Integralzeichen rechts in (12) stehende Reihe, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\alpha x - 2 \cos x + e^{-\alpha x}} \cdot \frac{x dx}{x^2 + \pi^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\alpha}. \quad (15)$$

Aus den beiden Gleichungen (11) und (13) kann man noch durch Addition und Subtraktion zwei andere ableiten, die aber wegen der Leichtigkeit der Entwicklung wegleiben mögen.

§. 4.

Ein Paar andere bemerkenswerthe Vergleichen zweier bestimmten Integrale ergeben sich auf folgende Weise.

Vermöge der Formel (2) in §. 2. ist offenbar

$$\int_y^\infty \frac{\mu-1}{e^{-\alpha y}} dy \int_0^\infty \frac{-y^x}{e^{-\alpha x}} \cos \beta x dx = \int_y^\infty \frac{\mu-1}{e^{-\alpha y}} dy \cdot \frac{y}{\beta^2 + y^2}. \quad (14)$$

Kehren wir in dem Doppelintegrale die Ordnung der Integrationen um und integrieren zuerst nach y , so ist dasselbe

$$\int_0^\infty \cos \beta x dx \int_y^\infty \frac{\mu-1}{e^{-(\alpha+x)y}} dy.$$

Nach der bekannten Bezeichnung der Eulerschen Integrale zweiter Art, d. h., der Gammafunktionen, ist aber überhaupt für positive μ und $k > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\mu-1}{e^{-ky}} dy = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}, \quad (15)$$

wonach sich die erste jener Integrationen ausführen läßt, wenn man $k = \alpha + x$ setzt. Vergleichen wir das entstehende Resultat mit der Formel (14), so ist jetzt

$$\Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{\cos \beta x dx}{(\alpha+x)^\mu} = \int_0^\infty \frac{y^\mu}{\beta^2 + y^2} \frac{-\alpha y}{e^{-\alpha y}} dy. \quad (16)$$

Eine ähnliche Gleichung findet man, wenn in der Formel (5) §. 2. y für α gesetzt, mit $y^{\mu-1} \frac{-\alpha y}{e^{-\alpha y}} dy$ multipliziert und zwischen 0 und ∞ integriert wird.

Es ist nämlich

$$\int_y^\infty \frac{\mu-1}{e^{-\alpha y}} dy \int_0^\infty \frac{-y^x}{e^{-\alpha x}} \sin \beta x dx = \int_y^\infty \frac{\mu-1}{e^{-\alpha y}} dy \cdot \frac{\beta}{\beta^2 + y^2} \quad (17)$$

und durch Umkehrung der Ordnung, in welcher auf der linken Seite die beiden Integrationen verrichtet werden sollen:

$$= \int_0^\infty \sin \beta x \, dx \int_0^\infty y^{\mu-1} \frac{e^{-(\alpha+x)y}}{e} \, dy = \Gamma(\mu) \int_0^\infty \sin \beta x \, dx \cdot \frac{1}{(\alpha+x)^\mu}$$

und folglich haben wir die Gleichung

$$\Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{\sin \beta x \, dx}{(\alpha+x)^\mu} = \beta \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}}{\beta^2 + y^2} e^{-\alpha y} \, dy. \quad (18)$$

Aus den beiden einander ganz analogen Resultaten (16) und (18) erhält man z. B. für $\alpha = 0$, $\beta = 1$:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu} \, dx = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{y^\mu}{1+y^2} \, dy \quad (19)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu} \, dx = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}}{1+y^2} \, dy. \quad (20)$$

Es geht daraus hervor, daß die Integrale links unendlich große Werthe annehmen, sobald μ eine ganze Zahl ist, wobei aber im zweiten Integrale der Fall $\mu = 1$ ausgeschlossen werden muß, indem man für diesen erhält

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}. \quad (21)$$

Dagegen kann man für gebrochene μ die Werthe jener Integrale nach der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \, dz = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, \quad +1 > \alpha > 0$$

bestimmen. Setzt man nämlich in derselben $z = y^2$, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{y^{2\alpha-1}}{1+y^2} \, dy = \frac{\pi}{2 \sin \alpha\pi}, \quad +1 > \alpha > 0. \quad (22)$$

Nimmt man hier einmal $\alpha = \frac{\mu+1}{2}$ und das andere Mal $\alpha = \frac{\mu}{2}$, so erhält man die auf den rechten Seiten der Gleichungen (19) und (20) stehenden Integrale; berücksichtigt man noch die Bedingungen $+1 > \alpha = \frac{\mu+1}{2} > 0$ und $+1 > \alpha = \frac{\mu}{2} > 0$, so ist jetzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu} \, dx = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \cdot \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} \mu\pi}, \quad +1 > \mu > 0. \quad (23)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu} \, dx = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \cdot \frac{\pi}{2 \sin \frac{1}{2} \mu\pi}, \quad +2 > \mu > 0. \quad (24)$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ ist bekanntlich $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, und man erhält dann

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (25)$$

Eine andere Anwendung der Integrale (16) und (18) ist folgende:

Weil $\beta^2 \frac{y^\mu}{\beta^2 + y^2} + y^2 \frac{y^\mu}{\beta^2 + y^2} = y^\mu$, so hat man auch

$$\beta^2 \int_0^{\infty} \frac{y^\mu}{\beta^2 + y^2} e^{-\alpha y} dy + \int_0^{\infty} \frac{y^{\mu+2}}{\beta^2 + y^2} e^{-\alpha y} dy = \int_0^{\infty} y^\mu e^{-\alpha y} dy.$$

Führt man das Integral rechts aus, und substituirt für jedes auf der linken Seite ein anderes nach Formel (16), so wird jetzt

$$\beta^2 \Gamma(\mu) \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{(\alpha + x)^\mu} dx + \Gamma(\mu + 2) \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{(\alpha + x)^{\mu+2}} dx = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\alpha^{\mu+1}}$$

oder weil bekanntlich $\Gamma(\mu + 1) = \mu \Gamma(\mu)$, $\Gamma(\mu + 2) = \mu(\mu + 1) \Gamma(\mu)$ ist,

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{\beta^2}{(\alpha + x)^\mu} + \frac{\mu(\mu + 1)}{(\alpha + x)^{\mu+2}} \right] \cos \beta x dx = \frac{\mu}{\alpha^{\mu+1}}. \quad (26)$$

Weil ferner $\beta^2 \frac{y^{\mu-1}}{\beta^2 + y^2} + y^2 \frac{y^{\mu-1}}{\beta^2 + y^2} = y^{\mu-1}$, so hat man auch

$$\beta^2 \int_0^{\infty} \frac{y^{\mu-1}}{\beta^2 + y^2} e^{-\alpha y} dy + \int_0^{\infty} \frac{y^{\mu+1}}{\beta^2 + y^2} e^{-\alpha y} dy = \int_0^{\infty} y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy$$

und wenn man wieder das Integral rechts ausführt und für jedes links nach Formel (18) ein anderes substituirt:

$$\beta^2 \Gamma(\mu) \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{(\alpha + x)^\mu} dx + \Gamma(\mu + 2) \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{(\alpha + x)^{\mu+2}} dx = \beta \frac{\Gamma(\mu)}{\alpha^\mu}$$

oder wenn man mit $\Gamma(\mu)$ hebt:

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{\beta^2}{(\alpha + x)^\mu} + \frac{\mu(\mu + 1)}{(\alpha + x)^{\mu+2}} \right] \sin \beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^\mu}, \quad (27)$$

ein der Gleichung (26) ganz analoges Resultat.

§. 5.

Eine andere weiter ausgebreitete Klasse von Doppelintegralen entsteht dadurch, daß man irgend eine Transscendente, deren Definition durch ein Integral gegeben ist, wieder als Faktor einer zu integrierenden Differenzialformel annimmt. Hieher gehört vorzüglich die unter dem Namen Integrallogarithmus bekannte, mit li. x bezeichnete transscendente Funktion, deren Definition bekanntlich durch die Gleichung

$$\text{li. } x = \int_0^x \frac{dx}{\ln x} \quad (28)$$

gegeben ist, statt deren man auch die unendliche Reihe

$$(18) \quad \text{li. } x = l(\pm lx) + \frac{1}{1} \cdot \frac{lx}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(lx)^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(lx)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \left. \vphantom{\frac{1}{1} \cdot \frac{lx}{1}} \right\} \quad (29)$$

$$+ C = 0,5772156 \dots$$

setzen kann, wobei in $l(\pm lx)$ das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem x die Einheit übersteigt oder nicht.

Da man nun für den Integrallogarithmus Tafeln besitzt wie für trigonometrische Funktionen, so könnte man analog den Integralen

$$\int_a^b \varphi(x) \sin x \, dx, \quad \int_a^b \varphi(x) \cos x \, dx, \quad \text{etc.}$$

in denen $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion bedeutet, auch Integrale von der Form

$$\int_a^b \varphi(x) \text{li. } x \, dx \quad (30)$$

betrachten und wenigstens versuchen, ob sich die angedeutete Integration nicht für gewisse Funktionen $\varphi(x)$ ausführen läßt. Jedes Integral dieser Form wird nun entweder auf eine doppelte Integration oder auf eine unendliche Reihe führen, je nachdem man sich für li. x der ersten oder zweiten der Gleichungen (28) und (29) bedient. Wir wollen uns für das Erste entscheiden, weil sich die Untersuchung dadurch am einfachsten gestaltet, sobald man erst dem Integral (28) constante Gränzen verschafft hat. Dies geschieht auf folgende Weise.

Für $x = \alpha$ hat man

$$\text{li. } \alpha = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{lx}$$

und wenn man $x = \alpha y$ setzt, wird $y = 1$, $y = 0$, wenn $x = \alpha$, $x = 0$ ist, folglich

$$\text{li. } \alpha = \alpha \int_0^1 \frac{dy}{l\alpha + ly}$$

Für $y = e^{-z}$ wird ferner $z = 0$, $z = \infty$, sobald y die Werthe 1 und 0 angenommen hat, mithin

$$\text{li. } \alpha = -\alpha \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{l\alpha - z} dz = +\alpha \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{l\alpha + z} dz$$

Für $\alpha = e^u$, $\alpha = e^{-u}$ ist noch

$$\text{li. } (e^u) = e^u \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{u - z} dz$$

$$\text{li. } (e^{-u}) = -e^{-u} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{u + z} dz$$

oder für $z = ux$:

$$\operatorname{li}\left(\frac{u}{e}\right) = e^u \int_0^{\infty} \frac{e^{-ux}}{1-x} dx \quad (31)$$

$$\operatorname{li}\left(\frac{-u}{e}\right) = -e^{-u} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ux}}{1+x} dx \quad (32)$$

und nach Formel (29):

$$\operatorname{li}\left(\frac{u}{e}\right) = C + \ln u + \frac{1}{1} \cdot \frac{u}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (33)$$

$$\operatorname{li}\left(\frac{-u}{e}\right) = C + \ln u - \frac{1}{1} \cdot \frac{u}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (34)$$

Dies ist der Apparat, den wir für das Folgende nöthig haben.

§. 6.

Wir multiplizieren jetzt die Gleichung (31) mit $u^{\mu-1} \frac{e^{-\alpha u}}{e}$ du, worin α und μ beliebige Größen sind, und integrieren nach u zwischen den Grenzen $u = 0$, $u = \infty$; es ergibt sich so:

$$\int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-\alpha u}}{e} \operatorname{li}\left(\frac{u}{e}\right) du = \int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-(\alpha-1)u}}{e} du \int_0^{\infty} \frac{e^{-ux}}{1-x} dx$$

Kehren wir auf der rechten Seite die Integrationsordnung um und integrieren zuerst nach u , so wird das fragliche Integral

$$= \int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x} \int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-(\alpha-1+x)u}}{e} du$$

Hier läßt sich die Integration nach u ausführen und zwar vermöge der bekannten Formel

$$\int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-ku}}{e} du = \frac{\Gamma(\mu)}{k^{\mu}},$$

welche indessen nur für positive k gilt. Soll daher auch in unserem Integrale die Größe $\alpha - 1 + x = k$ immer positiv bleiben, so darf α nicht kleiner als die Einheit sein. Denn vermöge der zweiten Integration erstreckt sich x von 0 bis ∞ , d. h. wenn δ eine unendlich kleine Größe bedeutet, so durchläuft x die Werthe 0, δ , 2δ , 3δ etc., also unser k der Reihe nach die Werthe $\alpha - 1$, $\alpha - 1 + \delta$, $\alpha - 1 + 2\delta$, etc., von denen eine gewisse Partie negativ ausfallen würde, wenn man $\alpha < +1$ nähme.

Führen wir unter dieser Beschränkung jene Integration aus, so ergibt sich

$$\int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-\alpha u}}{e} \operatorname{li}\left(\frac{u}{e}\right) du = \Gamma(\mu) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{1}{(\alpha-1+x)^{\mu}}, \quad \alpha \geq +1. \quad (35)$$

Das Integral auf der rechten Seite ist ein algebraisches und kann für jedes α und μ leicht ausgeführt werden. Für $\alpha = 1$ ist das Integral rechts

$$= \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1-x)^{\mu}} = \int_0^{\infty} \frac{x^{(1-\mu)-1}}{1-x} dx.$$

Eine bekannte Formel sagt aber:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{1-x} dx = \frac{\pi}{\tan \nu\pi}, \quad +1 \geq \nu \geq 0,$$

folglich in unserem Falle für $\nu = 1 - \mu$, so daß jetzt auch μ die Grenzen 0 und 1 nicht übersteigen darf:

$$\int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} \operatorname{li} \left(\frac{u}{e} \right) du = -\frac{\pi \Gamma(\mu)}{\tan \mu\pi}, \quad +1 \geq \mu \geq 0. \quad (36)$$

Ein anderer spezieller Fall der Gleichung (35) ist der für $\alpha = 2$, $\mu = 1$, in welchem auf der rechten Seite das Integral steht:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-x^2},$$

das für $x = \sqrt{z}$ in das folgende übergeht:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{z^2} - 1}{1-z} dz,$$

dessen Werth nach der oben citirten Formel (für $\nu = \frac{1}{2}$) die Null ist.

Es ist daher

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2u}}{e} \operatorname{li} \left(\frac{u}{e} \right) du = 0. \quad (37)$$

§. 7.

Wir multiplizieren die Formel (32) mit $u^{\mu-1} \frac{e^{-\alpha u}}{e}$ du und integrieren nach u zwischen den Grenzen $u = 0$, $u = \infty$; es ist dann

$$\int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-\alpha u}}{e} \operatorname{li} \left(\frac{u}{e} \right) du = - \int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-(\alpha+1)u}}{e} du \int_0^{\infty} \frac{e^{-ux}}{1+x} dx.$$

Durch Umkehrung der Reihenfolge der Integrationen wird das Doppelintegral auf der rechten Seite

$$= - \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x} \int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-(\alpha+1+x)u}}{e} du.$$

Das Integral nach u läßt sich wieder nach der früher citirten Formel von den Gammafunktionen ausführen, wenn wir $k = \alpha + 1 + x$ setzen. Dieses k bleibt immer positiv, so lange α eine positive GröÙe ist; wollen wir aber α negativ nehmen, so darf es wenigstens nicht kleiner als -1 sein.

Wir haben unter dieser Voraussetzung

$$\int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{e^{-\alpha u}}{e} \operatorname{li} \left(\frac{u}{e} \right) du = -\Gamma(\mu) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)(\alpha+1+x)^{\mu}}, \quad \alpha \geq -1. \quad (38)$$

Es lassen sich hiervon leicht mehrere spezielle Fälle angeben.

Für $\alpha = -1$ ist das Integral auf der rechten Seite

$$= \int_0^{\infty} \frac{(1-\mu)-1}{x} \frac{dx}{1+x},$$

welches sich nach der bekannten Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \nu\pi}, \quad +1 \geq \nu \geq 0$$

für $\nu = 1 - \mu$ leicht ausführen läßt, so daß man erhält:

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{\mu-1}}{e^u} \operatorname{li} \left(\frac{-u}{e} \right) du = -\frac{\pi \Gamma(\mu)}{\sin \mu\pi}, \quad +1 \geq \mu \geq 0, \quad (39)$$

welche Formel das Analogon zur Gleichung (36) ist.

Man kann übrigens das Integral auf der rechten Seite in (38) unter einer etwas bequemeren Gestalt darstellen, wenn man nämlich $\frac{1}{1+x} = z$, also $x = \frac{1}{z} - 1$ setzt. Das Integral geht dann, abgesehen von dem Faktor $-\Gamma(\mu)$ in das folgende über:

$$+ \int_1^0 \frac{dz}{z(\alpha + \frac{1}{z})^\mu} = - \int_0^1 \frac{z^{\mu-1}}{(az+1)^\mu} dz,$$

und folglich ist nun

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{\mu-1}}{e^u} \operatorname{li} \left(\frac{-u}{e} \right) du = -\Gamma(\mu) \int_0^1 \frac{z^{\mu-1}}{(1+az)^\mu} dz, \quad \alpha \geq -1. \quad (40)$$

Man erhält hieraus sogleich für $\alpha = 0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{\mu-1}}{e^u} \operatorname{li} \left(\frac{-u}{e} \right) du = -\frac{\Gamma(\mu)}{\mu}, \quad (41)$$

und für $\mu = 1$, ohne α zu ändern:

$$\int_0^{\infty} \frac{-\alpha u}{e^u} \operatorname{li} \left(\frac{-u}{e} \right) du = -\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}, \quad \alpha \geq -1. \quad (42)$$

Für $\mu = \frac{1}{2}$ steht auf der rechten Seite das Integral

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1+az)}},$$

welches für $z = x^2$ in das folgende übergeht:

$$2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\alpha x^2}}.$$

Vorausgesetzt, daß α eine positive GröÙe ist, hat man als unbestimmtes Integral der integrierten Differenzialformel den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{li} \left(x + \sqrt{\frac{1}{\alpha} + x^2} \right) + \text{const.}$$

und mithin durch Einführung der Grenzen 0 und 1:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1+az)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left[\operatorname{li} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha}} \right) - \operatorname{li} \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \right) \right] = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{li} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{1+\alpha}),$$

folglich weil $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ist:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} e^{-\alpha u} \operatorname{li}\left(\frac{-u}{e}\right) du = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{1+\alpha}\right), \quad \alpha > 0,$$

oder wenn man u^2 für u setzt:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha u^2} \operatorname{li}\left(\frac{-u^2}{e}\right) du = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{1+\alpha}\right), \quad \alpha > 0. \quad (43)$$

Für negative α , deren absoluter Werth < 1 ist, erhält man ebenso leicht

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha u^2} \operatorname{li}\left(\frac{-u^2}{e}\right) du = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \operatorname{Arcsin} \sqrt{\alpha}, \quad \alpha < 1. \quad (44)$$

§. 8.

Da die Gröfse α in der Formel (42) ganz beliebig ist, sobald man sie als positiv ansieht, so kann man ihr auch imaginäre Werthe geben und namentlich $\alpha + \beta \sqrt{-1}$ für dieselbe setzen. Durch Anwendung der bekannten Formeln, welche imaginäre Logarithmen auf reelle Kreisfunktionen zurückführen, erhält man leicht

$$\int_0^{\infty} \frac{-\alpha u}{e^{\alpha u}} \cos \beta u \operatorname{li}\left(\frac{-u}{e}\right) du = -\frac{\alpha \sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2} + \beta \operatorname{Arctan} \frac{\beta}{1+\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (45)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{-\alpha u}{e^{\alpha u}} \sin \beta u \operatorname{li}\left(\frac{-u}{e}\right) du = -\frac{\beta \sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2} - \alpha \operatorname{Arctan} \frac{\beta}{1+\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (46)$$

Ausdrücke, die sich auch unmittelbar entdecken lassen, wenn man für $\operatorname{li}\left(\frac{-u}{e}\right)$ das Integral (32) setzt und beide Integrationen ausführt.

Für $\alpha = 0$ hat man sehr einfach

$$\int_0^{\infty} \cos \beta u \operatorname{li}\left(\frac{-u}{e}\right) du = -\frac{\operatorname{Arctan} \beta}{\beta} \quad (47)$$

$$\int_0^{\infty} \sin \beta u \operatorname{li}\left(\frac{-u}{e}\right) du = -\frac{1(1+\beta^2)}{2\beta}. \quad (48)$$

Aus diesen Formeln lassen sich zwei neue Integrale ableiten, deren gemeinschaftlicher Werth der Integrallogarithmus ist. Denn man nehme in den von Fourier angegebenen Formeln (80) und (81) oder

$$\varphi(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha \omega d\omega \int_0^{\infty} \varphi(\theta) \cos \omega \theta d\theta, \quad \infty > \alpha > 0$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \alpha \omega d\omega \int_0^{\infty} \varphi(\theta) \sin \omega \theta d\theta, \quad \infty > \alpha > 0$$

$\varphi(\theta) = \operatorname{li}\left(\frac{-\theta}{e}\right)$ und führe die Integrationen nach θ mittelst der Formeln (47) und (48) aus, indem man θ für u , ω für β setzt, so ergibt sich

$$\operatorname{li}\left(\frac{-\alpha}{e}\right) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} \omega}{\omega} \cos \alpha \omega \, d\omega \quad (49)$$

$$\operatorname{li}\left(\frac{-\alpha}{e}\right) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{l(1 + \omega^2)}{\omega} \sin \alpha \omega \, d\omega \quad (50)$$

wobei bemerkt werden muß, daß die erste Formel noch für $\alpha = 0$, $\alpha = \infty$ gilt, während die zweite in der zweiten nicht der Fall ist.

§. 9.

Wir wollen uns noch mit einigen Anwendungen der gefundenen Ausdrücke beschäftigen.

Es sei in Formel (42) $\alpha = 1$, und für den Integrallogarithmus $\operatorname{li}\left(\frac{-u}{e}\right)$ wieder die in (34) angegebene Reihe gesetzt; es ergibt sich so

$$-12 = C \int_0^{\infty} \frac{-u}{e^u} \, du + \int_0^{\infty} \frac{-u}{e^u} l u \, du - \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \int_0^{\infty} \frac{-u^2}{e^u} \, du + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \int_0^{\infty} \frac{-u^3}{e^u} \, du - \dots$$

Bestimmt man die Werthe der Integrale rechts, mit Ausnahme des zweiten, nach der Formel:

$$\int_0^{\infty} \frac{-u^n}{e^u} \, du = \Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n,$$

so wird

$$-12 = C + \int_0^{\infty} \frac{-u}{e^u} l u \, du - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$$

d. i. sehr einfach

$$\int_0^{\infty} \frac{-u}{e^u} l u \, du = -C = -(0,5772156 \dots) \quad (51)$$

Man kann sich von diesem Integrale zu einem etwas allgemeineren erheben, wenn man nämlich links $u = \alpha x$ setzt; es muß dann auch sein:

$$\alpha \int_0^{\infty} \frac{-\alpha x}{e^{\alpha x}} l(\alpha x) \, dx = -C.$$

Da aber $l(\alpha x) = l\alpha + lx$, so wird das Integral auf der linken Seite

$$\begin{aligned} &= \alpha l\alpha \int_0^{\infty} \frac{-\alpha x}{e^{\alpha x}} \, dx + \alpha \int_0^{\infty} \frac{-\alpha x}{e^{\alpha x}} lx \, dx \\ &= l\alpha + \alpha \int_0^{\infty} \frac{-\alpha x}{e^{\alpha x}} lx \, dx, \end{aligned}$$

und durch Vergleichung mit dem Werthe $-C$ desselben:

$$\int_0^{\infty} \frac{-\alpha x}{e^{\alpha x}} lx \, dx = -\frac{1}{\alpha} (C + l\alpha). \quad (52)$$

Aus diesem Integrale läßt sich ein anderes von Bedeutung auf folgende Weise ableiten. Man setze

u für α , multiplizire beiderseits mit $u^{\mu} \frac{-pu}{e}$ du und integriere nach u zwischen den Gränzen $u = 0$ und $u = \infty$, so ist:

$$\int_0^{\infty} u^{\mu} \frac{-pu}{e} du \int_0^{\infty} \frac{-nx}{e} lx dx = -c \int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{-pu}{e} du - \int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{-pu}{e} lu du. \quad (53)$$

Betrachten wir jede Seite der Gleichung für sich.

Das Doppelintegral auf der linken Seite geht durch Umkehrung der Integrationsordnung in das folgende über:

$$\int_0^{\infty} lx dx \int_0^{\infty} u^{\mu} \frac{-(p+x)u}{e} du = \Gamma(\mu+1) \int_0^{\infty} \frac{lx dx}{(p+x)^{\mu+1}}.$$

Die Integrale auf der rechten Seite sind offenbar:

$$\begin{aligned} &= -c \frac{\Gamma(\mu)}{\mu} - \frac{d}{d\mu} \left[\frac{\Gamma(\mu)}{\mu} \right] = -c \frac{\Gamma(\mu)}{\mu} - \frac{\Gamma'(\mu)}{\mu} + \frac{\Gamma(\mu)}{\mu} lp \\ &= \frac{\Gamma(\mu)}{\mu} \left[lp - c - \frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)} \right]. \end{aligned}$$

Vergleichen wir dies mit der linken Seite der Gleichung (53), wie wir sie vorher reduziert haben, dividiren beiderseits mit $\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu)$ und schreiben $\frac{d \cdot l\Gamma(\mu)}{d\mu}$ für $\frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)}$, so ist

$$\int_0^{\infty} \frac{lx dx}{(p+x)^{\mu+1}} = \frac{1}{\mu p} \left[lp - c - \frac{d \cdot l\Gamma(\mu)}{d\mu} \right]. \quad (54)$$

Unter dieser Form ist das Integral von keinem besonderen Nutzen, weil man den Werth des Ausdrucks $\frac{d \cdot l\Gamma(\mu)}{d\mu}$ nur durch Summirung einer unendlichen Reihe erhält; es läßt sich aber aus der vorstehenden Gleichung eine andere ableiten, welche für jedes beliebige positive μ den Werth des Integrales in endlicher Form darstellt. Man gelangt dazu mittelst folgender Eigenschaft der Gammafunktionen:

$$\frac{d \cdot l\Gamma(\alpha)}{d\alpha} - \frac{d \cdot l\Gamma(\beta)}{d\beta} = \int_0^1 \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{1-x} dx, \quad (55)$$

welche sich leicht aus nachstehender Betrachtung ergibt.

Eine bekannte Formel sagt:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{-az}{e} - \frac{-bz}{e} \right) \frac{dz}{z} = l \frac{b}{a}, \text{ folglich } \int_0^{\infty} \left(\frac{-z}{e} - \frac{-uz}{e} \right) \frac{dz}{z} = ln.$$

Durch Differenziation der Gleichung

$$\int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{-u}{e} du = \Gamma(\mu)$$

nach μ ergibt sich ferner

$$\int_0^{\infty} u^{\mu-1} \frac{-u}{e} du \cdot lu = l'(\mu),$$

folglich, wenn man den obigen Werth von $\Gamma(\mu)$ in diese Gleichung substituirt:

$$\begin{aligned}\Gamma'(\mu) &= \int_0^\infty u^{\mu-1} \frac{-u}{e^u} du \int_0^\infty \frac{dz}{z} \frac{-z}{e^z} - \int_0^\infty u^{\mu-1} \frac{-u}{e^u} du \int_0^\infty \frac{dz}{z} \frac{-uz}{e^z} \\ &= \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{dz}{z} \frac{-z}{e^z} - \int_0^\infty \frac{dz}{z} \int_0^\infty u^{\mu-1} \frac{-(1+z)u}{e^u} du \\ &= \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{dz}{z} \frac{-z}{e^z} - \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{dz}{z} \cdot \frac{1}{(1+z)^\mu}.\end{aligned}$$

Dividirt man nun beiderseits mit $\Gamma(\mu)$, so wird

$$\frac{d \cdot \Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \frac{-z}{e^z} - \int_0^\infty \frac{dz}{z(1+z)^\mu}.$$

Dabei ist das erste Integral von μ unabhängig. Schreibt man daher die Gleichung für $\mu = \alpha$, $\mu = \beta$ hin und subtrahirt beide, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d \cdot \Gamma(\alpha)}{d\alpha} - \frac{d \cdot \Gamma(\beta)}{d\beta} &= \int_0^\infty \frac{dz}{z(1+z)^\beta} - \int_0^\infty \frac{dz}{z(1+z)^\alpha} \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{(1+z)^\beta} - \frac{1}{(1+z)^\alpha} \right] \frac{dz}{z}.\end{aligned}$$

Nimmt man jetzt $\frac{1}{1+z} = x$, also $z = \frac{1}{x} - 1$, so wird $dz = -\frac{dx}{x^2}$ und für $z = \infty$, $z = 0$ nimmt die neue Veränderliche x die Werthe $x = 0$, $x = 1$ an, so daß das Integral rechts sich in das folgende verwandelt:

$$-\int_1^0 \left[x^\beta - x^\alpha \right] \frac{dx}{\left(\frac{1}{x} - 1\right) x^2} = -\int_1^0 \left[x^\beta - x^\alpha \right] \frac{dx}{(1-x)x}.$$

Vertauscht man die Integrationsgränzen, so wird das Integral positiv und man erhält die Gleichung (55).

§. 10.

Aus der Gleichung (54) folgt nun durch Multiplikation mit μp^μ :

$$\mu p^\mu \int_0^\infty \frac{lx \, dx}{(p+x)^{\mu+1}} = C - lp - \frac{d \cdot \Gamma(\mu)}{d\mu},$$

also wenn man $\mu = \beta$, $\mu = \alpha$ setzt, beide so entstehenden Gleichungen subtrahirt und auf der rechten Seite die Formel (55) anwendet:

$$\beta p^\beta \int_0^\infty \frac{lx \, dx}{(p+x)^{\beta+1}} - \alpha p^\alpha \int_0^\infty \frac{lx \, dx}{(p+x)^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{1-x} dx,$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{(p+x)^{\beta+1}} = \frac{\alpha p}{\beta p} \int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{(p+x)^{\alpha+1}} + \frac{1}{\beta p} \int_0^1 \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{1-x} dx. \quad (56)$$

Könnte man jetzt für irgend einen Werth von α das erste Integral auf der rechten Seite ausführen, so wäre der Werth des Integrales links für jedes beliebige β bekannt. Denn das zweite Integral rechts läßt sich, was auch α und β sein mögen, immer auf die Form

$$\int_0^1 \frac{z^{m-1} - z^{n-1}}{1-z} dz$$

bringen, worin m, n, r ganze positive Zahlen sind. Man kennt aber das unbestimmte Integral einer solchen Differenzialformel, folglich auch den Werth des Integrales innerhalb der Gränzen 0 und 1.

Ein solcher Werth von α , für welchen das erste Integral rechts gefunden werden kann, ist aber der $\alpha = 1$. Man hat in diesem Falle nach einer sehr bekannten Reduktionsformel

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x \, dx}{(p+x)^2} &= \ln x \int \frac{dx}{(p+x)^2} - \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{(p+x)^2} \\ &= -\frac{\ln x}{p+x} + \frac{\ln x}{p} - \frac{\ln(p+x)}{p}. \end{aligned}$$

Dies läßt sich auf zwei verschiedene Weisen schreiben; nämlich einmal

$$-\frac{\ln x}{p+x} - \frac{1}{p} \ln \left(\frac{p}{x} + 1 \right)$$

und dann

$$\frac{x \ln x}{p(p+x)} - \frac{\ln(p+x)}{p}.$$

Der ersten Form bedienen wir uns für $x = \infty$, der zweiten für $x = 0$. Es findet sich dann nach den gewöhnlichen Regeln, durch die man die Werthe unbestimmt scheinender Brüche bestimmt:

$$\frac{\ln x}{p+x} = 0 \text{ für } x = \infty \text{ und } x \ln x = 0 \text{ für } x = 0,$$

mithin

$$\int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{(p+x)^2} = \frac{\ln p}{p}.$$

Wir haben nun aus Formel (56), wenn wir $\alpha = 1$ und $\beta = \mu$ setzen:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x \, dx}{(p+x)^{\mu+1}} = \frac{\ln p}{\mu p} + \frac{1}{\mu p} \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} - 1}{1-x} dx. \quad (57)$$

Ein Paar spezielle Fälle dieser Gleichung können leicht angegeben werden.

Ist erstlich $\mu =$ einer ganzen positiven Zahl $n+1$, so ist das Integral auf der rechten Seite, abgesehen von seinem Coefficienten,

$$\begin{aligned} &= - \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx = - \int_0^1 (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) dx \\ &= - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

und folglich

$$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{(p+x)^{n+2}} = \frac{1}{(n+1)p} \left[lp - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right]. \quad (58)$$

Ist ferner $\mu = \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2}$, so steht auf der rechten Seite das Integral

$$\int_0^1 \frac{x^{n-\frac{1}{2}} - 1}{1-x} dx,$$

welches für $x = z^2$ in das folgende übergeht:

$$2 \int_0^1 \frac{z^{2n} - z}{1-z^2} dz.$$

Der Werth desselben findet sich auf folgendem Wege. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{z^{2n} - z}{1-z^2} &= (1+z) \left(\frac{z^{2n-1}}{1-z} - 1 \right) + 1 - z \\ &= (1+z) \left(\frac{z^{2n-1}}{1-z} - 1 \right) + z - z^{2n-1} + 1 - z, \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{z^{2n} - z}{1-z^2} = \frac{z^{2n-1}}{1-z} - 1 + \frac{z^{2n-1}}{1-z^2} + \frac{1}{1+z}$$

und

$$2 \int_0^1 \frac{z^{2n} - z}{1-z^2} dz = -2 \int_0^1 \frac{1-z}{1-z} dz + 2 \int_0^1 \frac{1-z}{1-z^2} z dz + 2 \int_0^1 \frac{dz}{1+z}$$

Der Werth des ersten Integrales auf der rechten Seite findet sich auf ähnliche Weise wie bei dem vorigen Beispiele; derselbe ist

$$= -2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right).$$

Der Werth des letzten Integrales ist $= 2 \ln 2$ und den des mittelsten kann man auf folgende Weise ermitteln. Man setze $z^2 = x$, so wird dasselbe

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x} dx \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wir haben daher

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \frac{z^{2n} - z}{1-z^2} dz &= -2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) + 2 \ln 2 \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

oder:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-\frac{1}{2}} - 1}{1-x} dx = 2l2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right).$$

Wir haben daher aus Formel (57) für $\mu = n + \frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{lx dx}{(p+x)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(2n+1)p^{n+\frac{1}{2}}} \left[lp + 2l2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \right] \quad (59)$$

§. 11.

Man kann auch ein Paar in die Differenzialrechnung gehörende Theoreme aus den Formeln (58) und (59) ableiten.

Differenziert man nämlich die Gleichung

$$\frac{lp}{p} = \int_0^\infty \frac{lx dx}{(p+x)^2}$$

nmal nach p und bezeichnet den nten Differenzialquotienten $\frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{lp}{p}\right)$ kurz mit $D^n \left(\frac{lp}{p}\right)$, so ist

$$D^n \left(\frac{lp}{p}\right) = \int_0^\infty lx dx \cdot D^n \cdot (p+x)^{-2} = (-1)^n \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1) \int_0^\infty lx dx (p+x)^{-2-n}$$

und wenn man den Werth des Integrales rechts aus Formel (58) substituirt:

$$D^n \left(\frac{lp}{p}\right) = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{p} \left[lp - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \right]. \quad (60)$$

Aus Formel (57) erhält man ferner für $\mu = \frac{1}{2}$:

$$\frac{2lp}{\sqrt{p}} + \frac{4l2}{\sqrt{p}} = \int_0^\infty \frac{lx dx}{(p+x)^{\frac{3}{2}}}$$

und durch nmalige Differenziation nach p:

$$2 D^n \left(\frac{lp}{\sqrt{p}}\right) + 4l2 D^n \left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = (-1)^n \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2n+1}{2} \int_0^\infty lx dx (p+x)^{-\frac{3}{2}-n}$$

Setzt man für das Integral rechts seinen Werth aus der Gleichung (59), so ist jetzt

$$2 D^n \left(\frac{lp}{\sqrt{p}}\right) + 4l2 \cdot D^n \left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2}{p^{n+\frac{1}{2}}} \left[lp + 2l2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \right]$$

Da nun aber

$$D^n \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \right) = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{p^{n+\frac{1}{2}}}$$

ist, so heben sich die mit 12 behafteten Glieder und es bleibt blos

$$D^n \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \right) = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot p^{n+\frac{1}{2}}} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \right] \quad (61)$$

Aus der Formel (58) folgt auch noch eine bekannte Eigenschaft der Constante C des Integrallogarithmus. Nimmt man nämlich $p = n$, so ist durch Multiplikation mit $(n+1)n^{n+1}$:

$$\int_0^\infty \frac{(n+1)n}{(n+x)^2} \cdot \frac{n^n}{(n+x)^n} \ln x \, dx = \ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right),$$

wobei sich die linke Seite auch so darstellen läßt:

$$\int_0^\infty \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \ln x \, dx.$$

Gehen wir jetzt zur Gränze für unendlich wachsende n über, so wird

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2} = 1, \quad \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

und folglich haben wir

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^x} \ln x \, dx = \lim \left[\ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \right].$$

Nach Formel (51) ist aber der Werth des Integrales $= -C$, folglich

$$C = \lim \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right]. \quad (62)$$

§. 12.

Es lassen sich auch auf dem Wege der doppelten Integration einige allgemeine Theoreme ableiten, die in vielen Fällen zur Auffindung der Werthe gewisser bestimmter Integrale dienen können. Diese Ableitung ist folgende.

Die Formeln (41) und (42) in II. können in folgender Gestalt gegeben werden:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(2p)^{n+1}}{\pi} \Gamma(n+1) \int_0^\infty \frac{\cos x\theta \, d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} \\ &= \left[\frac{x^n}{n} + \frac{(n+1)n}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{p} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^{n-2}}{p^2} + \cdots \right] e^{-px} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2(2p)^n}{\pi} \Gamma(n+1) \int_0^\infty \frac{\theta \sin x\theta d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} \\ & = \left[x^n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{p} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^{n-2}}{p^2} + \dots \right] e^{-px}, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

indem wir nämlich p für α gesetzt und alle Faktoren der rechten Seite, welche von x frei waren, auf die linke Seite transponirt haben. Für das Folgende ist es von Wichtigkeit, zu bemerken, daß diese Gleichungen auch für $x = 0$ und $x = \infty$ richtig bleiben. In der ersten kommt auf der linken Seite unter den Potenzen von x auch die $x^{n-n} = 1$ vor, während in der zweiten kein Glied der eingeklammerten Reihe von x frei ist. Für $x = 0$ geht daher die erste Gleichung in die folgende über:

$$\frac{(2p)^{n+1}}{\pi} \Gamma(n+1) \int_0^\infty \frac{d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} = \frac{2n(2n-1) \dots 2 \cdot 1}{2 \cdot 4 \dots (2n-2) 2n} \cdot \frac{1}{p}$$

oder

$$2 \int_0^\infty \frac{d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{\pi}{2 p^{2n+1}}$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung überzeugt man sich sogleich, wenn man auf der linken Seite $\theta = p \sqrt{z}$ setzt, wodurch

$$2 \int_0^\infty \frac{d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} = \frac{1}{p^{2n+1}} \int_0^\infty \frac{z^{n+1} - 1}{(1+z)^{n+1}} dz$$

wird, und nun den Werth des Integrales nach der Formel

$$\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1} dz}{(1+z)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (65)$$

bestimmt. Man erhält so

$$2 \int_0^\infty \frac{d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}$$

und in der That ist dieser Werth des Integrales mit dem aus der Gleichung (63) genommenen identisch, weil bekanntlich $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ist. In der Gleichung (64) annulliren sich für $x = 0$ beide Seiten, wie es wirklich sein muß.

Nehmen wir dagegen in den Formeln (63) und (64) x unendlich groß, so erhalten wir leicht nach den früheren Betrachtungen in 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\cos x\theta d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\cos x\theta}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos \theta d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\theta \sin x\theta d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sin x\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\theta \sin \theta d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

Die nämlichen Gränzwerthe geben aber auch die rechten Seiten der Gleichungen (63) und (64). Denn es ist für jedes ganze positive m

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^{px}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\frac{p}{m} x} \right)^m,$$

und weil bekanntlich $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{p}{m} x} = 0$ ist, auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^{px}} = 0$. Für wachsende x nähert sich also jedes

Glied auf der rechten Seite von (63) und (64) der Null, mithin geht auch der Werth des ganzen Integrales in Null über, wie oben schon auf anderem Wege gefunden wurde.

Bezeichnen wir jetzt in der Gleichung (63) den Coefficienten des Integrales kurz mit P und die Coefficienten von x^n, x^{n-1}, x^{n-2} etc. mit M_0, M_1, M_2 etc., multiplizieren durchgängig mit $f(x) dx$, wobei $f(x)$ eine beliebige Funktion bedeutet, und integrieren nach x zwischen den Gränzen a und b , so wird:

$$P \int_a^b f(x) dx \int_0^\infty \frac{\cos x\theta d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} \\ = M_0 \int_a^b \frac{x^n}{e^{px}} f(x) dx + M_1 \int_a^b \frac{x^{n-1}}{e^{px}} f(x) dx + M_2 \int_a^b \frac{x^{n-2}}{e^{px}} f(x) dx + \dots$$

Kehren wir im Doppelintegrale auf der linken Seite die Integrationsordnung um und integrieren zuerst nach x , so ist

$$P \int_0^\infty \frac{d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} \left\{ \int_a^b f(x) \cos \theta x dx \right. \\ \left. = M_0 \int_a^b \frac{x^n}{e^{px}} f(x) dx + M_1 \int_a^b \frac{x^{n-1}}{e^{px}} f(x) dx + M_2 \int_a^b \frac{x^{n-2}}{e^{px}} f(x) dx + \dots \right\} \quad (66)$$

Wählt man nun die beliebige Funktion $f(x)$ so, daß sich die Werthe der Integrale

$$\int_a^b f(x) \cos \theta x dx = \varphi(\theta), \quad \int_a^b \frac{x^n}{e^{px}} f(x) dx = \psi(p) \quad (67)$$

in geschlossener Form angeben lassen, so bleibt auf der linken Seite nur ein einfaches Integral stehen und man erfährt auf der rechten den Werth desselben, weil sich hier alle Integrale ausführen lassen. Denn aus

$$\int_a^b \frac{x^n}{e^{px}} f(x) dx = \psi(p)$$

folgt durch m malige partielle Differenziation nach p :

$$\int_a^b \frac{x^m}{e^{px}} f(x) dx = (-1)^m \cdot \frac{d^m \psi(p)}{dp^m} = (-1)^m \psi^{(m)}(p), \quad (68)$$

und unter dieser Form sind alle Integrale auf der rechten Seite von (66) enthalten. Man hat daher unter Voraussetzung der Gleichungen in (67), wenn man die Werthe von P und M in (66) wieder einsetzt:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(2p)^{n+1}}{\pi} \Gamma(n+1) \int_0^\infty \frac{\varphi(\theta) d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} \\ & = (-1)^n \left[\psi^{(n)}(p) - \frac{(n+1)n}{2 \cdot p} \psi^{(n-1)}(p) + \frac{(n+2)(n+1)(n-1)}{2 \cdot 4 \cdot p^2} \psi^{(n-2)}(p) - \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Behandelt man auf gleiche Weise die Gleichung (64), indem man den Coefficienten des Integrales mit Q und die Coefficienten der Potenzen x^n, x^{n-1}, x^{n-2} etc. mit N_0, N_1, N_2 etc. bezeichnet, so findet man

$$\left. \begin{aligned} & Q \int_0^\infty \frac{\theta d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} \int_a^b f(x) \sin \theta x dx \\ & = N_0 \int_a^b x^n e^{-px} f(x) dx + N_1 \int_a^b x^{n-1} e^{-px} f(x) dx + N_2 \int_a^b x^{n-2} e^{-px} f(x) dx + \dots \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

oder für

$$\int_a^b f(x) \sin \theta x dx = \varphi(\theta), \quad \int_a^b x^n e^{-px} f(x) dx = \psi(p) \quad (71)$$

und durch Wiedereinsetzung der Werthe von Q und N :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2(2p)^n}{\pi} \Gamma(n+1) \int_0^\infty \frac{\theta \varphi(\theta) d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} \\ & = (-1)^n \left[\psi^{(n)}(p) - \frac{n(n-1)}{2 \cdot p} \psi^{(n-1)}(p) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 4 \cdot p^2} \psi^{(n-2)}(p) - \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Hinsichtlich der Integrationsgränzen a und b für x ist noch zu bemerken, daß man dieselben nicht negativ nehmen darf, weil die Gleichungen (63) und (64) für negative x nicht mehr richtig sind; dagegen kann man ihnen die Werthe 0 und ∞ geben, da jene Gleichungen für $x = 0$ und $x = \infty$ noch Gültigkeit besitzen, wie vorhin gezeigt worden ist.

§. 13.

Ein paar bemerkenswerthe Beispiele für die gefundenen Theoreme (69) und (72) sind folgende:

1. Man nehme $f(x) = \text{li}\left(\frac{-x}{e}\right)$, $a = 0$, $b = \infty$, so ist für die Gleichung (69):

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \int_0^\infty \text{li}\left(\frac{-x}{e}\right) \cos \theta x dx = -\frac{\text{Arctan } \theta}{\theta}, \\ \psi(p) &= \int_0^\infty \frac{-px}{e} \text{li}\left(\frac{-x}{e}\right) dx = -\frac{1(1+p)}{p}, \end{aligned}$$

folglich

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(2p)^{n+1}}{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctan} \theta \, d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} \\ & = (-1)^n \left[\psi^n(p) - \frac{(n+1)n}{2 \cdot p} \psi^{n-1}(p) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4 \cdot p^2} \psi^{n-2}(p) - \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Für die Gleichung (72) hat $\psi(p)$ den nämlichen Werth, dagegen ist

$$\varphi(\theta) = \int_0^\infty \operatorname{li}\left(\frac{-x}{e}\right) \sin \theta x \, dx = -\frac{\ln(1 + \theta^2)}{\theta},$$

mithin

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2(2p)^n}{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{\ln(1 + \theta^2) \, d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}} \\ & = (-1)^n \left[\psi^n(p) - \frac{n(n-1)}{2 \cdot p} \psi^{n-1}(p) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 4 \cdot p^2} \psi^{n-2}(p) - \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

2. Es sei $f(x) = \frac{1}{x^\mu}$, dabei μ ein positiver echter Bruch und $a = 0$, $b = \infty$. Dann wird

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \int_0^\infty \frac{\cos \theta x}{x^\mu} \, dx = \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2 \Gamma(\frac{\mu}{2}) \cos \frac{1}{2} \mu \pi}, \\ (-1)^m \psi^m(p) &= \int_0^\infty x^{m-\mu} \frac{e^{-px}}{e} \, dx = \frac{\Gamma(m+1-\mu)}{p^{m+1-\mu}} \end{aligned}$$

und folglich für $p = 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{2^n}{\Gamma(\mu) \cos \frac{1}{2} \mu \pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{\theta^{\mu-1} \, d\theta}{(1 + \theta^2)^{n+1}} \\ & = \Gamma(n+1-\mu) + \frac{(n+1)n}{2} \Gamma(n-\mu) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4} \Gamma(n-\mu-1) + \dots \end{aligned}$$

oder, wenn wir $m-1$ für n setzen:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2^{m-1}}{\Gamma(\mu) \cos \frac{1}{2} \mu \pi} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{\theta^{\mu-1} \, d\theta}{(1 + \theta^2)^m} \\ & = \Gamma(m-\mu) + \frac{m(m-1)}{2} \Gamma(m-\mu-1) + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 4} \Gamma(m-\mu-2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Der Werth des Integrales auf der linken Seite läßt sich aber durch die Gammafunktionen selbst bestimmen und zwar mittelst der Formel (65), nachdem man $\theta = \sqrt{z}$ gesetzt hat. Es ist dann

$$\int_0^\infty \frac{\theta^{\mu-1} \, d\theta}{(1 + \theta^2)^m} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{\mu-1}{2}} \, dz}{(1+z)^m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu\right) \Gamma(m - \frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(m)}.$$

Nun sind aber folgende zwei Sätze von den Gammafunktionen bekannt:

$$\Gamma(n+\alpha) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+n-1) \Gamma(\alpha) \quad (76)$$

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}, \quad (77)$$

also ist nach dem ersten für $\alpha = 1 - \frac{1}{2} \mu$, $n = m - 1$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2} \mu) \Gamma(m - \frac{1}{2} \mu)}{\Gamma(m)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{2} \mu) (2 - \frac{1}{2} \mu) (3 - \frac{1}{2} \mu) \dots (m - 1 - \frac{1}{2} \mu)}{\Gamma(m)} \cdot \Gamma(\frac{1}{2} \mu) \Gamma(1 - \frac{1}{2} \mu)$$

und dieses ist vermöge des zweiten Satzes für $\alpha = \frac{1}{2} \mu$ auch

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{2} \mu) (2 - \frac{1}{2} \mu) (3 - \frac{1}{2} \mu) \dots (m - 1 - \frac{1}{2} \mu) \pi}{\Gamma(m) \sin \frac{1}{2} \mu \pi}$$

Die linke Seite der Gleichung (75) gestaltet sich jetzt folgendermaßen:

$$\frac{2^{m-1} (1 - \frac{1}{2} \mu) (2 - \frac{1}{2} \mu) (3 - \frac{1}{2} \mu) \dots (m - 1 - \frac{1}{2} \mu) \pi}{\Gamma(\mu) \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \mu \pi \cdot \cos \frac{1}{2} \mu \pi}$$

Vertheilt man noch die $m - 1$ Zweien der Potenz 2^{m-1} auf die $m - 1$ Faktoren $1 - \frac{1}{2} \mu$ bis $m - 1 - \frac{1}{2} \mu$ und schreibt $\sin \mu \pi$ für $2 \sin \frac{1}{2} \mu \pi \cdot \cos \frac{1}{2} \mu \pi$, so ergibt sich durch Vergleichung mit der rechten Seite der Formel (75) das folgende Theorem von den Gammafunktionen:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(2 - \mu) (4 - \mu) (6 - \mu) \dots (2m - 2 - \mu) \pi}{\Gamma(\mu) \sin \mu \pi} \\ & = \Gamma(m - \mu) + \frac{m(m-1)}{2} \Gamma(m - \mu - 1) + \frac{(m+1) m(m-1) (m-2)}{2 \cdot 4} \Gamma(m - \mu - 2) + \dots \end{aligned} \right\} + 1 > \mu > 0. \quad (78)$$

Die Formel (72) gestattet für $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0$, $b = \infty$, $p = 1$ eine ganz gleiche Behandlung und liefert das analoge Resultat:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(1 - \mu) (3 - \mu) (5 - \mu) \dots (2m - 3 - \mu) \pi}{\Gamma(\mu) \sin \mu \pi} \\ & = \Gamma(m - \mu) + \frac{(m-1) (m-2)}{2} \Gamma(m - \mu - 1) + \frac{m(m-1) (m-2) (m-3)}{2 \cdot 4} \Gamma(m - \mu - 2) + \dots \end{aligned} \right\} + 1 > \mu > 0. \quad (79)$$

Diese beiden eleganten Theoreme über die Gammafunktionen sind spezielle Fälle eines viel allgemeineren, mit dessen Beweise wir uns im nächsten Paragraphen beschäftigen wollen.

§. 14.

Aus dem bekannten Integrale

$$\int_0^\infty z^\mu e^{-kz} dz = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{k^{\mu + 1}}$$

folgt zunächst für $z = x^2$:

$$\int_0^\infty x^{2\mu + 1} e^{-kx^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\mu + 1)}{k^{\mu + 1}} \quad (80)$$

Ferner ist bekanntlich

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} - 1} e^{-x} dx$$

oder für $x = k\theta^2$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{k\theta^2}} d\theta. \quad (81)$$

Durch nmalige Differentiation dieser Gleichung nach k ergibt sich hieraus

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{k^{n+\frac{1}{2}}} = \int_0^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{e^{k\theta^2}} d\theta$$

oder wenn man k^2 für k setzt und beiderseits mit $\frac{h}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)}$ multipliziert:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2k} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)} \cdot \frac{h^{2n}}{k^{2n}} = \int_0^{\infty} \frac{(h\theta)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)} \frac{1}{e^{k\theta^2}} d\theta.$$

Die linke Seite ist aber auch

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2k} \cdot \frac{1}{2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{h^{2n}}{k^{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2k} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{h^{2n}}{2^{2n} k^{2n}}$$

und also auch

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2k} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \left(\frac{h^2}{4k^2}\right)^n = \int_0^{\infty} \frac{(h\theta)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)} \frac{1}{e^{k\theta^2}} d\theta.$$

Addiren wir zur Gleichung (81) alle die Glieder mit wechselnden Zeichen, welche aus der vorliegenden Formel für $n = 1, 2, 3, \dots$ etc. entspringen, so ist

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi}}{2k} \left[1 - \frac{1}{1} \cdot \frac{h^2}{4k^2} + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(\frac{h^2}{4k^2}\right)^2 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{h^2}{4k^2}\right)^3 + \cdots \right] \\ &= \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{(h\theta)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(h\theta)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(h\theta)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots \right] \frac{1}{e^{k\theta^2}} d\theta. \end{aligned}$$

Diese Reihen convergiren für alle Werthe von h, k, θ und können nach bekannten Summenformeln summirt werden. Es ist nämlich:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2k} \frac{1}{e^{k\theta^2}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{k\theta^2}} \cos h\theta d\theta. \quad (82)$$

Schreiben wir x für k , 2β für h , so wird

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{x} \frac{1}{e^{x\theta^2}} = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{x\theta^2}} \cos 2\beta\theta d\theta.$$

Diese Gleichung wollen wir mit $x^{2\mu+1} \frac{1}{e^{x^2\theta^2}}$ multiplizieren und zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = \infty$ integriren. Wir haben so:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} \frac{2\mu}{x} \frac{1}{e^{x^2\theta^2}} \left(x^2\theta^2 + \frac{\beta^2}{x^2} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{2\mu+1}{x} \frac{1}{e^{x^2\theta^2}} dx \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{x^2\theta^2}} \cos 2\beta\theta d\theta.$$

Kehren wir in dem Doppelintegral auf der rechten Seite die Integrationsordnung um und integrieren zuerst nach x , so geht dasselbe in das folgende über:

$$\int_0^\infty \cos 2\beta\theta \, d\theta \int_0^\infty x^{2\mu+1} \frac{e^{-(\alpha^2 + \theta^2)x^2}}{e} \, dx,$$

worin sich die erste Integration nach Formel (80) ausführen lässt, wenn man das dortige $k = \alpha^2 + \theta^2$ setzt. Wir erhalten dadurch das einfache Integral:

$$\frac{1}{2} \Gamma(\mu+1) \int_0^\infty \frac{\cos 2\beta\theta \, d\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^{\mu+1}}$$

und durch Substitution desselben die Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{2\mu} \frac{e^{-(\alpha^2 x^2 + \frac{\beta^2}{x^2})}}{e} \, dx = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos 2\beta\theta \, d\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^{\mu+1}}. \quad (83)$$

Der Werth des Integrales auf der rechten Seite lässt sich für den Fall, dass μ eine ganze positive Zahl ist, leicht angeben, indem man nämlich die Formel (41) der IIten Abtheilung für $x = 2\beta$ in Anwendung bringt.

Man erhält nämlich für $\mu = n$ leicht den folgenden Ausdruck:

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^\infty x^{2n} \frac{e^{-(\alpha^2 x^2 + \frac{\beta^2}{x^2})}}{e} \, dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \left[1 + \frac{(n+1)n}{2} \left(\frac{1}{2\alpha\beta}\right) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4} \left(\frac{1}{2\alpha\beta}\right)^2 + \dots \right] e^{-2\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich jenes allgemeine Theorem über die Gammafunktionen ableiten, von welchem die früheren Sätze nur spezielle Fälle waren. Man setze zur Abkürzung

$$\frac{(n+1)n}{2} = M_1, \quad \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4} = M_2 \text{ u. s. f.}$$

ferner $\alpha = c \sqrt{\theta}$, $\beta = a \sqrt{\theta}$, so ist

$$\begin{aligned} & \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c}{a}\right)^n \frac{1}{\theta^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty x^{2n} \frac{e^{-(c^2 x^2 + \frac{a^2}{x^2})\theta}}{e} \, dx \\ &= \left[1 + \frac{M_1}{2ac} \theta^{-1} + \frac{M_2}{(2ac)^2} \theta^{-2} + \dots \right] e^{-2ac\theta} \end{aligned}$$

Daraus entspringt durch Multiplikation mit

$$\theta^{\mu-1} \frac{e^{-b^2\theta}}{e} \, d\theta$$

und Integration nach θ zwischen den Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = \infty$ folgende Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c}{a}\right)^n \int_0^\infty \theta^{\mu+\frac{1}{2}-1} \frac{e^{-b^2\theta}}{e} \, d\theta \int_0^\infty x^{2n} \frac{e^{-(c^2 x^2 + \frac{a^2}{x^2})\theta}}{e} \, dx \\ &= \int_0^\infty \theta^{\mu-1} \frac{e^{-(b^2+2ac)\theta}}{e} \, d\theta + \frac{M_1}{2ac} \int_0^\infty \theta^{\mu-2} \frac{e^{-(b^2+2ac)\theta}}{e} \, d\theta + \frac{M_2}{(2ac)^2} \int_0^\infty \theta^{\mu-3} \frac{e^{-(b^2+2ac)\theta}}{e} \, d\theta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Auf der rechten Seite lassen sich sämtliche Integrationen mittelst der Gammafunktionen ausführen und man erhält:

$$\frac{\Gamma(\mu)}{(b^2 + 2ac)^\mu} + \frac{M_1}{2ac} \cdot \frac{\Gamma(\mu - 1)}{(b^2 + 2ac)^{\mu-1}} + \frac{M_2}{(2ac)^2} \cdot \frac{\Gamma(\mu - 2)}{(b^2 + 2ac)^{\mu-2}} + \dots \quad (86)$$

Das Doppelintegral auf der linken Seite geht, abgesehen von seinem Coefficienten, durch Umkehrung der Integrationsordnung in das folgende über:

$$\int_0^\infty x^{2n} dx \int_0^\infty \theta^{\mu + \frac{1}{2} - 1} \frac{1}{c} \left(b^2 + c^2 x^2 + \frac{a^2}{x^2} \right)^\theta d\theta,$$

worin sich wieder die Integration nach θ bewerkstelligen läßt.

Es ergibt sich nämlich:

$$\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \int_0^\infty x^{2n} dx \cdot \frac{1}{\left(b^2 + c^2 x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)^{\mu + \frac{1}{2}}} = \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \int_0^\infty \frac{x^{2n + 2\mu + 1} dx}{(b^2 x^2 + c^2 x^4 + a^2)^{\mu + \frac{1}{2}}}$$

Durch Einführung einer neuen Veränderlichen $z = x^2$ verwandelt sich dieses Integral in das einfachere:

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \int_0^\infty \frac{z^{n + \mu} dz}{(a^2 + b^2 z + c^2 z^2)^{\mu + \frac{1}{2}}}$$

Substituieren wir jetzt die für die rechte und linke Seite der Gleichung (85) gefundenen Ausdrücke, so gelangen wir zu dem Resultat:

$$\begin{aligned} & \frac{c \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c}{a}\right)^n \int_0^\infty \frac{z^{n + \mu} dz}{(a^2 + b^2 z + c^2 z^2)^{\mu + \frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma(\mu)}{(b^2 + 2ac)^\mu} + \frac{M_1}{2ac} \cdot \frac{\Gamma(\mu - 1)}{(b^2 + 2ac)^{\mu-1}} + \frac{M_2}{(2ac)^2} \cdot \frac{\Gamma(\mu - 2)}{(b^2 + 2ac)^{\mu-2}} + \dots, \end{aligned}$$

welches sich, wenn wir $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ und x für a , b , c , z setzen, in die elegantere Form stellt:

$$\begin{aligned} & \frac{c \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty \frac{x^{n + \mu} dx}{(a + bx + cx^2)^{\mu + \frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma(\mu)}{(b + 2\sqrt{ac})^\mu} + \frac{M_1}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{\Gamma(\mu - 1)}{(b + 2\sqrt{ac})^{\mu-1}} + \frac{M_2}{(2\sqrt{ac})^2} \cdot \frac{\Gamma(\mu - 2)}{(b + 2\sqrt{ac})^{\mu-2}} + \dots \end{aligned} \quad (87)$$

Soll die Reihe auf der rechten Seite eine endliche Summe haben, so darf keine der Größen $\mu - 1$, $\mu - 2$, etc. negativ werden, weil sonst eine der Gammafunktionen unendlich würde. Die Reihe selbst bricht mit einem Gliede ab, dessen Zähler ist:

$$M_n \Gamma(\mu - n) = \frac{(n + n) (n + n - 1) \dots (n - n + 1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \Gamma(\mu - n),$$

weil alle folgenden Glieder den Faktor $n - n = 0$ enthalten. Haben wir daher $\mu > n$, so sind die Größen μ , $\mu - 1$, $\mu - 2$, ..., $\mu - n$ sämtlich positiv und in diesem Falle der Werth jenes Integrales (87) eine endliche Gröfse.

Für $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ ergibt sich aus der Gleichung (87) ein allgemeines Theorem über die Gammafunktionen. Es ist dann

deren Werthe durch doppelte Integrationen gefunden werden.

91

$$\frac{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^{n+\mu} dx}{(1+x^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2^\mu} \left[\Gamma(\mu) + M_1 \Gamma(\mu-1) + M_2 \Gamma(\mu-2) + \dots \right]$$

Für $x = \sqrt{z}$ läßt sich der Werth des Integrales nach Formel (65) finden; es wird nämlich die linke Seite

$$= \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{n+\mu+1}{2}-1} dz}{(1+z)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}$$

Substituiren wir dies in die vorige Gleichung, multiplizieren dann beiderseits mit 2^μ und setzen für M_1, M_2 etc. ihre Werthe, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\mu+n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-n}{2}\right) \\ & = \Gamma(\mu) + \frac{(n+1)n}{2} \Gamma(\mu-1) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4} \Gamma(\mu-2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

wobei wieder $\mu > n$ sein muß, wenn kein Glied unendlich groß werden soll.

Dieses Theorem ist ungefähr für die Theorie der Gammafunktionen das, was das Binomialtheorem bei ganzen positiven Exponenten für die Potenzenlehre, nämlich die Auflösung des Problems: die Summe einer endlichen Reihe von gewissen Funktionen durch eine Funktion der nämlichen Art auszudrücken.

Nimmt man erst $n = m-1$, dann $n = m-2$ und setzt in beiden Fällen $m - \mu$ für μ , so erhält man die Theoreme (78) und (79).

§. 15.

Wir wollen endlich noch einen allgemeinen Satz über bestimmte Integrale mittheilen, welcher in vielen Fällen von Nutzen sein kann.

Wenn nämlich der Werth des bestimmten Integrales

$$\int_0^1 \frac{f(x) dx}{x^{2n+2} \sqrt{1-x^2}} = A$$

für jedes ganze positive n bekannt ist, so läßt sich daraus der Werth des Integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx}{(1+x^2)^{m+1}}$$

worin m eine ganze positive Zahl bedeutet, auf folgende Weise ableiten.

Man setze in dem Ausdrucke für A $x = \frac{2z}{1+z^2}$, so findet man

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2(1-z^2)}{(1+z^2)^2} dz,$$

wenn ferner x die Werthe $x = 0$, $x = 1$ angenommen hat, ist auch $z = 0$ und $z = 1$ geworden*).

*) Statt $z = 0$ könnte man auch $z = \infty$ setzen, wodurch ebenfalls x der unteren Gränze Null gleich wird. Diefes ändert aber, wenn man damit fortrechnet, in dem Endresultate nichts.

Bemerkt man ferner, daß $\frac{1}{x} = \frac{1+z^2}{2z} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ist, so gestaltet sich jetzt das Integral auf folgende Weise:

$$\frac{1}{2^{2n+1}} \int_0^1 \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n+2} f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) \frac{dz}{1+z^2} = A_{2n+2}$$

oder, weil $1+z^2 = z \left(z + \frac{1}{z} \right)$ ist,

$$\int_0^1 \left(z + \frac{1}{z} \right)^{2n+1} f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) \frac{dz}{z} = 2^{2n+1} A_{2n+2} \quad (89)$$

Für jede ungerade Zahl μ und einen beliebigen Bogen u giebt es nun folgende goniometrische Reihe (Cauchy, *cours d'analyse* page 235):

$$(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos \mu u = \frac{\mu}{1} \cos u - \frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 u + \frac{(\mu+3)(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^5 u - \dots$$

Zerlegt man jeden Cosinus in seine imaginären Exponentialgrößen, setzt dann $e^{u\sqrt{-1}} = z$ und $\mu = 2m+1$, wo jetzt m jede ganze positive Zahl sein darf, so gelangt man leicht zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^m}{2m+1} \left(z^{2m+1} + \frac{1}{z^{2m+1}} \right) \\ &= \left(z + \frac{1}{z} \right) - \frac{(m+1)m}{2 \cdot 3} \left(z + \frac{1}{z} \right)^3 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(z + \frac{1}{z} \right)^5 - \dots \end{aligned}$$

Multipliziert man beide Seiten derselben mit $f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) \frac{dz}{z}$ und integriert zwischen den Grenzen 0 und 1, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung (89):

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^m}{2m+1} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{z^{2m+1}} f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) dz + \int_0^1 \frac{1}{z^{2m+2}} f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) dz \right\} \\ &= 2A_2 - \frac{(m+1)m}{2 \cdot 3} 2^3 A_4 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 2^5 A_6 - \dots \end{aligned} \quad (90)$$

Führt man in das zweite der Integrale links die neue Veränderliche $x = \frac{1}{z}$ ein, so wird $\frac{2z}{1+z^2} = \frac{2x}{1+x^2}$, $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x^2}$ und die Grenzen für x werden $x = \infty$ und $x = 1$; mithin das Integral selbst

$$= - \int_{\infty}^1 \frac{1}{x^{2m+1}} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2m+1}} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx.$$

Schreiben wir im ersten jener Integrale innerhalb der Parenthese x für z , so ist die linke Seite der Gleichung (90):

$$\frac{(-1)^m}{2m+1} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{x^{2m+1}} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2m+1}} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx \right\} = \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{2m+1}} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx.$$

Wir haben daher folgendes elegante Theorem:

Wenn für jedes ganze positive n der Werth des bestimmten Integrales

$$A_{2n+2} = \int_0^1 \frac{f(x) dx}{2n+2 \sqrt{1-x^2}} \quad (91)$$

bekannt ist, so folgt daraus der Werth des Integrales:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^\infty x^{2m} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx \\ & = 2A_2 - \frac{(m+1)m}{2 \cdot 3} 2^3 A_4 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 2^5 A_6 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

worin wieder m eine ganze positive Zahl bedeutet.

§. 16.

Ein Paar bemerkenswerthe Beispiele sind folgende:

1. Es sei $f(x) = \frac{-p}{e^x \sqrt{1-x^2}}$. Für $x = \frac{1}{z}$ ist dann

$$A_{2n+2} = \int_0^1 \frac{1}{2n+2} \frac{-p}{e^x} dx = \int_1^\infty \frac{2n}{z} \frac{-p}{e^{pz}} dz = \frac{d}{dp} \left[\int_1^\infty \frac{-p}{e^{pz}} dz \right],$$

d. h.

$$A_{2n+2} = \frac{d}{dp} \left(\frac{-p}{e^p} \right).$$

Ferner wird

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{-p}{e^{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} e^{-\frac{1}{2}p\left(x+\frac{1}{x}\right)},$$

folglich:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^\infty \frac{1-x^2}{1+x^2} x^{2m} e^{-\frac{1}{2}p\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx \\ & = 2 \left(\frac{-p}{e^p} \right) - \frac{(m+1)m}{2 \cdot 3} 2^3 \cdot \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{-p}{e^p} \right) + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 2^5 \cdot \frac{d^4}{dp^4} \left(\frac{-p}{e^p} \right) - \dots \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

2. Nimmt man $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-c^2x^2}}$, wo $c < 1$ und $\varphi(x)$ eine beliebige rationale algebraische Funktion von x ist, so läßt sich

$$A_{2n+2} = \int_0^1 \frac{\varphi(x) dx}{2n+2 \sqrt{(1-c^2x^2)(1-x^2)}}$$

durch die vollständigen elliptischen Funktionen F^1 und E^1 ausdrücken.

Man kann diesem Integrale eine bequemere Form geben, wenn man $x = \sin \theta$ setzt; man erhält dann leicht

$$A_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(\sin \theta) d\theta}{\sin^{2n+2} \theta \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}}.$$

So wäre z. B. für $m = 1$, $\varphi(x) = x^4$:

$$= -\frac{2^4}{3} \int_0^\infty \frac{x^6 dx}{(1+x^2)^3 \sqrt{1+(2-4c^2)x^2+x^4}} \\ = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}} - \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}} = \frac{2}{c^2} [F^1(c) - E^1(c)] - \frac{8}{3} F^1(c),$$

also

$$\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 \frac{dx}{\sqrt{1+(2-4c^2)x^2+x^4}} = \frac{1}{2} F^1(c) + \frac{3}{8} \cdot \frac{E^1(c) - F^1(c)}{c^2}. \quad (94)$$

Ebenso kann man $f(x) = \varphi(x) \sqrt{1-c^2x^2}$ nehmen, wobei wieder $\varphi(x)$ eine rationale algebraische Funktion von x sein mag. Dann läßt sich wieder der Werth des Integrales

$$A_{2n+2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-c^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\varphi(x) dx}{x^{2n+2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\varphi(\sin \theta) d\theta}{\sin^{2n+2} \theta}$$

mit Hülfe der elliptischen Funktionen angeben; z. B. für $m = 1$, $\varphi(x) = x^4$,

$$-\frac{2^4}{3} \int_0^\infty \frac{x^6 dx}{(1+x^2)^5} \sqrt{1+(2-4c^2)x^2+x^4} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta d\theta - \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta} \cdot d\theta \\ = 2 \left[\frac{2c^2-1}{3c^2} E^1(c) + \frac{1-c^2}{3c^2} F^1(c) \right] - \frac{8}{3} E^1(c)$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{x^6 dx}{(1+x^2)^5} \sqrt{1+(2-4c^2)x^2+x^4} = \frac{2c^2+1}{8c^2} E^1(c) - \frac{1-c^2}{8c^2} F^1(c). \quad (95)$$

5. Auch ein Theorem über die Gammafunktionen kann man aus dem allgemeinen Satze (92) ableiten. Man setze nämlich:

$$f(x) = x^{2p+1} (1-x^2)^{q+\frac{1}{2}-1},$$

so wird

$$A_{2n+2} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{2p-2n-2} (1-x^2)^{q-1} \cdot 2x dx$$

und für $x^2 = y$,

$$A_{2n+2} = \frac{1}{2} \int_0^1 y^{p-n-1} (1-y)^{q-1} dy.$$

Der Werth dieses Integrales läßt sich nach der bekannten Formel

$$\int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (96)$$

welche man aus (65) durch Einführung der neuen Veränderlichen $y = \frac{z}{1+z}$ erhält, mittelst der Gammafunktionen angeben; es ist nämlich

$$A_{2n+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(p-n) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q-n)}. \quad (97)$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{2m} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx &= \int_0^\infty x^{2m} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{2p+1} \left[1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2\right]^{q+\frac{1}{2}-1} dx \\ &= 2^{2p} \int_0^\infty x^{2m+2p} \frac{(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^{2p+2q}} 2x dx, \end{aligned}$$

welches Integral für $x^2 = z$ in das folgende übergeht:

$$2^{2p} \int_0^\infty \frac{(1-z)^{q-\frac{1}{2}}}{(1+z)^{2p+2q}} z^{p+m} dz. \quad (98)$$

Substituieren wir die Ausdrücke (97) und (98) in die Gleichung (92), bezeichnen die von m abhängigen Coefficienten auf der rechten Seite mit M_0, M_2, M_4 etc. und schreiben links x für z , so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{(-1)^m 2^{2p}}{(2m+1)} \int_0^\infty \frac{(1-x)^{q-\frac{1}{2}}}{(1+x)^{2p+2q}} x^{p+m} dx \\ &= M_0 \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} - 2^2 M_2 \frac{\Gamma(p-1) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q-1)} + 2^4 M_4 \frac{\Gamma(p-2) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q-2)} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

wodurch der Werth des Integrales gefunden ist.

In einem Falle, wenn nämlich $q = \frac{1}{2}$ ist, läßt sich dieser unabhängig von der rechten Seite nach Formel (65) für $\alpha = p + m + 1$, $\alpha + \beta = 2p + 1$ angeben; zugleich ist $\Gamma(q) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und man erhält daher die folgende Eigenschaft der Gammafunktionen:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{(-1)^m 2^{2p}}{(2m+1) \sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(p+m+1) \Gamma(p-m)}{\Gamma(2p+1)} \\ &= \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} - \frac{(m+1)m}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2^2 \Gamma(p-1)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2} - 1\right)} + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{2^4 \Gamma(p-2)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2} - 2\right)} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

wobei noch $p > m$ sein muß, wenn keine der Gammafunktionen unendlich werden soll.

F o r m e l s a m m l u n g.

I. Formeln, welche zu Reihensummierungen benutzt werden können.

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin (2n+1) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots + \cos nx = \frac{1}{2} + \frac{\cos (2n+1) \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n+1)x = \frac{\sin (2n+2)x}{2 \sin x}$$

$$\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \dots + \cos (2n+1)x = \frac{1}{2} \sec x + \frac{\cos (2n+2)x}{2 \cos x}$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{1}{2} \cot \frac{1}{2} x - \frac{\cos (2n+1) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \dots + \sin nx = \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} x + \frac{\sin (2n+1) \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2n+1)x = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} x - \frac{\cos (2n+2)x}{2 \sin x}$$

$$\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \dots + \sin (2n+1)x = \frac{\sin (2n+2)x}{2 \cos x}$$

I. §. 3.

$$\lim \int_0^{r\pi} \frac{\sin (2n+1) \theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + f(r-1\pi) + \frac{1}{2} f(r\pi) \right\}$$

$$\lim \int_0^{r\pi+b} \frac{\sin (2n+1) \theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + f(r-1\pi) + f(r\pi) \right\}, \pi > b > 0.$$

§. 4.

$$\lim \int_0^{\infty} \frac{\sin (2n+1) \theta}{\sin \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ \frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \dots \text{in inf.} \right\}.$$

§. 5.

$$\lim \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi} \frac{\cos (2n+1)\theta}{\cos \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + f\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \dots + \frac{1}{2} f\left(\frac{2r+1}{2}\pi\right) \right\}$$

$$\lim \int_0^{\frac{2r+1}{2}\pi + b} \frac{\cos (2n+1)\theta}{\cos \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + f\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \dots + f\left(\frac{2r+1}{2}\pi\right) \right\}, \quad \pi > b > 0.$$

$$\lim \int_0^\infty \frac{\cos (2n+1)\theta}{\cos \theta} f(\theta) d\theta = \pi \left\{ f\left(\frac{1}{2}\pi\right) + f\left(\frac{3}{2}\pi\right) + f\left(\frac{5}{2}\pi\right) + \dots \text{in inf.} \right\}.$$

§. 7.

$$f(z) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos z + a_2 \cos 2z + a_3 \cos 3z + \dots \text{in inf.}, \quad \pi \geq z \geq 0.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx.$$

$$f(z) = b_1 \sin z + b_2 \sin 2z + b_3 \sin 3z + \dots \text{in inf.}, \quad \pi > z > 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx.$$

§. 8.

$$z = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\cos z}{1^2} + \frac{\cos 3z}{3^2} + \frac{\cos 5z}{5^2} + \dots \right\}, \quad \pi \geq z \geq 0.$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos \mu z}{\sin \mu \pi} = \frac{1}{2\mu} + \frac{\mu \cos z}{1^2 - \mu^2} - \frac{\mu \cos 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{\mu \cos 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots, \quad +\pi \geq z \geq -\pi, \quad +1 > \mu > -1.$$

$$\frac{z}{2} \sin z = \frac{1}{2} - \frac{\cos z}{4} - \frac{\cos 2z}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 3z}{2 \cdot 4} - \frac{\cos 4z}{3 \cdot 5} + \dots, \quad +\pi \geq z \geq -\pi.$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha \cos z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{\alpha \cos 2z}{\alpha^2 + 2^2} - \frac{\alpha \cos 3z}{\alpha^2 + 3^2} + \dots, \quad +\pi \geq z \geq -\pi.$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha(\pi-z)} + e^{-\alpha(\pi-z)}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha \cos z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{\alpha \cos 2z}{\alpha^2 + 2^2} + \dots, \quad 2\pi \geq z \geq 0.$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(\frac{\pi}{2}-z)} - e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{\pi}{2}-z)}}{e^{\frac{\alpha}{2}\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}\frac{\pi}{2}}} = \frac{\alpha \cos z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{\alpha \cos 3z}{\alpha^2 + 3^2} + \frac{\alpha \cos 5z}{\alpha^2 + 5^2} + \dots, \quad \frac{\pi}{2} \geq z \geq 0.$$

§. 9.

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cot \mu \pi}{1^2 - \mu^2} + \frac{\mu}{(1 - \mu^2)^2} = \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\mu}{1^2 - \mu^2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{\mu}{2^2 - \mu^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\mu}{3^2 - \mu^2} + \dots, \quad +1 > \mu > -1.$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{1^2 + \alpha^2} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha \pi}{2}} + e^{-\frac{\alpha \pi}{2}}}{e^{\frac{\alpha \pi}{2}} - e^{-\frac{\alpha \pi}{2}}} - \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2)^2} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1^2} - \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + 3^2} - \dots$$

§. 10.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin z}{1} + \frac{\sin 3z}{3} + \frac{\sin 5z}{5} + \dots, \quad \pi > z > 0$$

$$\frac{z}{2} = \frac{\sin z}{1} - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \frac{\sin 4z}{4} + \dots, \quad +\pi > z > -\pi.$$

$$\frac{\pi - z}{2} = \frac{\sin z}{1} + \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} + \frac{\sin 4z}{4} + \dots, \quad 2\pi > z > 0.$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \mu z}{\sin \mu \pi} = \frac{\sin z}{1^2 - \mu^2} - \frac{2 \sin 2z}{2^2 - \mu^2} + \frac{3 \sin 3z}{3^2 - \mu^2} - \dots, \quad \pi > z > -\pi, \quad +1 > \mu > -1.$$

$$\frac{z}{2} \cos z = -\frac{\sin z}{4} + \frac{2 \sin 2z}{1 \cdot 3} - \frac{3 \sin 3z}{2 \cdot 4} + \frac{4 \sin 4z}{3 \cdot 5} - \dots, \quad \pi > z > -\pi.$$

$$\frac{z}{2} (1 + \cos z) = \frac{3}{4} \sin z + \frac{\sin 2z}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\sin 3z}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\sin 4z}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots, \quad \pi > z > -\pi.$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} = \frac{\sin z}{\alpha^2 + 1^2} - \frac{2 \sin 2z}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3z}{\alpha^2 + 3^2} - \dots, \quad \pi > z > -\pi.$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\alpha(\pi-z)} - e^{-\alpha(\pi-z)}}{e^{\alpha \pi} - e^{-\alpha \pi}} = \frac{\sin z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{2 \sin 2z}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{3 \sin 3z}{\alpha^2 + 3^2} + \dots, \quad 2\pi > z > 0.$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(\frac{\pi}{2}-z)} + e^{-\frac{\alpha}{2}(\frac{\pi}{2}-z)}}{e^{\frac{\alpha}{2} \frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2} \frac{\pi}{2}}} = \frac{\sin z}{\alpha^2 + 1^2} + \frac{3 \sin 3z}{\alpha^2 + 3^2} + \frac{5 \sin 5z}{\alpha^2 + 5^2} + \dots, \quad \frac{\pi}{2} > z > 0.$$

§§. 11 u. 12.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \\ &\quad + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots \end{aligned} \right\} \pi > x > -\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{c} \int_0^c \varphi(\theta) \, d\theta + \frac{2}{c} \sum_1^{\infty} \cos \frac{n\pi}{c} x \int_0^c \varphi(\theta) \cos \frac{n\pi}{c} \theta \, d\theta, \quad c \geq x \geq -c.$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{c} \sum_1^{\infty} \sin \frac{n\pi}{c} x \int_0^c \varphi(\theta) \sin \frac{n\pi}{c} \theta \, d\theta, \quad c > x > 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \varphi(\theta) \, d\theta + \frac{1}{c} \sum_1^{\infty} \cos \frac{n\pi}{c} x \int_{-c}^c \varphi(\theta) \cos \frac{n\pi}{c} \theta \, d\theta \\ &\quad + \frac{1}{c} \sum_1^{\infty} \sin \frac{n\pi}{c} x \int_{-c}^c \varphi(\theta) \sin \frac{n\pi}{c} \theta \, d\theta \end{aligned} \right\} +c > x > -c.$$

II. Die Werthe der wichtigsten bestimmten Integrale.

I. §. 13.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos x\omega \, d\omega \int_0^{\alpha} \varphi(\theta) \cos \omega\theta \, d\theta \\ \varphi(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin x\omega \, d\omega \int_0^{\alpha} \varphi(\theta) \sin \omega\theta \, d\theta \end{aligned} \right\} \alpha > x > 0.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(\theta) \cos \omega(\theta - x) d\theta, \quad + \alpha > x > -\alpha.$$

II. §. 3.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha x}, \quad \infty \geq x \geq 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta \sin x\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha x}, \quad \infty > x > 0.$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\cos x\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^{n+1}} d\theta \\ &= \frac{\pi e^{-\alpha x}}{\Gamma(n+1) 2^{n+1}} \left\{ \frac{x}{\alpha} + \frac{(n+1)n}{2} \cdot \frac{x}{\alpha^3} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x}{\alpha^5} + \dots \right\} \\ & \int_0^{\infty} \frac{\theta \sin x\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^{n+1}} d\theta \\ &= \frac{\pi e^{-\alpha x}}{\Gamma(n+1) 2^{n+1}} \left\{ \frac{x}{\alpha} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{x}{\alpha^3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x}{\alpha^5} + \dots \right\} \end{aligned}$$

§. 4.

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta \cot \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha\omega} \frac{1}{e^{-\alpha\omega} - 1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\theta \tan \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha\omega} \frac{1}{e^{\alpha\omega} + 1}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\theta \operatorname{cosec} \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{\alpha\omega} \frac{1}{e^{-\alpha\omega} - 1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\theta \sec \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{\alpha\omega} \frac{1}{e^{\alpha\omega} + 1}$$

§. 5.

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \sin \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \ln \left(\frac{1 - e^{-2\alpha\omega}}{2} \right), \quad \int_0^{\infty} \frac{1 \cos \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \ln \left(\frac{1 + e^{-2\alpha\omega}}{2} \right)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 \tan \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \ln \frac{1 - e^{-2\alpha\omega}}{1 + e^{-2\alpha\omega}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{1 \cot \omega\theta}{\alpha^2 + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \ln \frac{1 + e^{-2\alpha\omega}}{1 - e^{-2\alpha\omega}}$$

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1 + \tan \omega\theta}{1 - \tan \omega\theta} \cdot \frac{d\theta}{\theta(\alpha^2 + \theta^2)} = \frac{\pi}{\alpha^2} \operatorname{Arctan} \frac{1 - e^{-2\alpha\omega}}{1 + e^{-2\alpha\omega}}$$

§. 6.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\pi\theta} \sin \omega\theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega - e^{-\omega}}{e^{\omega} + 2 \cos z + e^{-\omega}}, \quad \pi \geq z \geq 0.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{z\theta} - e^{-z\theta}}{\pi\theta} \cos \omega\theta d\theta = \frac{\sin z}{e^{\omega} + 2 \cos z + e^{-\omega}}, \quad \pi > z > 0.$$

§. 7.

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos z + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z\theta} + e^{-x\theta}}{e^{\frac{\pi}{2}\theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\theta}} \cdot \frac{\sin x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left(e^x - e^{-x} \right) \sin z \cdot \frac{e^x + 2 \sin z + e^{-x}}{e - 2 \sin z + e^{-x}} + \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right) \cos z \cdot \operatorname{Arctan} \frac{2 \cos z}{\frac{x}{e} - \frac{-x}{e}} \end{aligned} \right\} \frac{\pi}{2} \geq z \geq 0.$$

$$\left. \begin{aligned} & 1 - \frac{\pi}{2} e^{-x} \cos z + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z\theta} + e^{-x\theta}}{e^{\frac{\pi}{2}\theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\theta}} \cdot \frac{\theta \cos x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left(e^x + e^{-x} \right) \sin z \cdot \frac{e^x + 2 \sin z + e^{-x}}{e - 2 \sin z + e^{-x}} + \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right) \cos z \cdot \operatorname{Arctan} \frac{2 \cos z}{\frac{x}{e} - \frac{-x}{e}} \end{aligned} \right\} \frac{\pi}{2} \geq z \geq 0.$$

§. 8.

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} (x \cos z + z \sin z) e^{-x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z\theta} + e^{-x\theta}}{e^{\frac{\pi}{2}\theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\theta}} \cdot \frac{\sin x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left(e^x - e^{-x} \right) \cos z \cdot \frac{1 + 2e^{-x} \cos z + e^{-2x}}{e - 2 \sin z + e^{-x}} + \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right) \sin z \operatorname{Arctan} \frac{\sin z}{\frac{x}{e} + \cos z} \end{aligned} \right\} \pi \geq z \geq 0.$$

§. 9.

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z\theta} - e^{-x\theta}}{e^{\frac{\pi}{2}\theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\theta}} \cdot \frac{\cos x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-x} \sin z - \frac{1}{4} \left(e^x + e^{-x} \right) \cos z \cdot \frac{e^x + 2 \sin z + e^{-x}}{e - 2 \sin z + e^{-x}} + \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right) \sin z \cdot \operatorname{Arctan} \frac{2 \cos z}{\frac{x}{e} - \frac{-x}{e}} \end{aligned} \right\} \frac{\pi}{2} > z > 0.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} (z \cos z - x \sin z) e^{-x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z\theta} - e^{-x\theta}}{e^{\frac{\pi}{2}\theta} - e^{-\frac{\pi}{2}\theta}} \cdot \frac{\cos x\theta}{1 + \theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left(e^x + e^{-x} \right) \sin z \cdot \frac{1 + 2e^{-x} \cos z + e^{-2x}}{e - 2 \sin z + e^{-x}} - \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right) \cos z \cdot \operatorname{Arctan} \frac{\sin z}{\frac{x}{e} + \cos z} \end{aligned} \right\} \pi > z > 0.$$

III. §. 2.

$$\alpha \pi \int_0^{\pi} \frac{\cos mx \, dx}{(\alpha \pi)^2 + x^2} = (-1)^m \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 - \pi^2} e^{-\alpha x} \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin mx \, dx}{(\alpha \pi)^2 + x^2} = (-1)^m \pi \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x^2 - \pi^2} e^{-\alpha x} \, dx.$$

§. 3.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\alpha x + 2 \cos x + e^{-\alpha x}} \cdot \frac{x \, dx}{x^2 - \pi^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\alpha x - 2 \cos x + e^{-\alpha x}} \cdot \frac{x \, dx}{x^2 - \pi^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\alpha}.$$

§. 4.

$$\Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{\cos \beta x \, dx}{(\alpha + x)^\mu} = \int_0^\infty \frac{y^\mu}{\beta^2 + y^2} e^{-\alpha y} \, dy$$

$$\Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{\sin \beta x \, dx}{(\alpha + x)^\mu} = \beta \int_0^\infty \frac{y^{\mu-1}}{\beta^2 + y^2} e^{-\alpha y} \, dy.$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{x^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \cdot \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} \mu \pi}, \quad +1 > \mu > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \, dx}{x^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \cdot \frac{\pi}{2 \sin \frac{1}{2} \mu \pi}, \quad 2 > \mu > 0.$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\beta^2}{(\alpha + x)^\mu} + \frac{\mu(\mu + 1)}{(\alpha + x)^{\mu+2}} \right] \cos \beta x \, dx = \frac{\mu}{\alpha^{\mu+1}}$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\beta^2}{(\alpha + x)^\mu} + \frac{\mu(\mu + 1)}{(\alpha + x)^{\mu+2}} \right] \sin \beta x \, dx = \frac{\beta}{\alpha^\mu}.$$

§. 5.

$$\text{li} \left(\frac{u}{e} \right) = e^u \int_0^\infty \frac{e^{-ux}}{1-x} \, dx, \quad \text{li} \left(\frac{-u}{e} \right) = -e^{-u} \int_0^\infty \frac{e^{-ux}}{1+x} \, dx.$$

§. 6.

$$\int_0^\infty u^{\mu-1} e^{-\alpha u} \text{li} \left(\frac{u}{e} \right) \, du = \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{dx}{1-x} \cdot \frac{1}{(\alpha - 1 + x)^\mu}, \quad \alpha \geq +1.$$

$$\int_0^\infty u^{\mu-1} e^{-u} \text{li} \left(\frac{u}{e} \right) \, du = -\frac{\pi \Gamma(\mu)}{\tan \mu \pi}, \quad +1 \geq \mu \geq 0.$$

§. 7.

$$\int_0^\infty u^{\mu-1} e^{-\alpha u} \text{li} \left(\frac{-u}{e} \right) \, du = -\Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{1}{(\alpha + 1 + x)^\mu}, \quad \alpha \geq -1.$$

$$\int_0^\infty u^{\mu-1} e^u \text{li} \left(\frac{-u}{e} \right) \, du = -\frac{\pi \Gamma(\mu)}{\sin \mu \pi}, \quad +1 \geq \mu \geq 0.$$

$$\int_0^\infty u^{\mu-1} \text{li} \left(\frac{-u}{e} \right) \, du = -\frac{\Gamma(\mu)}{\mu}, \quad \int_0^\infty e^{-\alpha u} \text{li} \left(\frac{-u}{e} \right) \, du = -\frac{1(1+\alpha)}{\alpha}, \quad \alpha \geq -1.$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u^2} \text{li} \left(\frac{-u^2}{e} \right) \, du = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, l(\sqrt{\alpha} + \sqrt{1+\alpha}), \quad \alpha > 0.$$

$$\int_0^\infty e^{\alpha u^2} \text{li} \left(\frac{-u^2}{e} \right) \, du = -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, \text{Arcsin} \sqrt{\alpha}, \quad \alpha < 1.$$

§. 8.

$$\int_p^\infty \frac{-\alpha u}{e} \cos \beta u \operatorname{li} \left(\frac{-u}{e} \right) du = - \frac{\alpha \sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2} + \beta \operatorname{Arctan} \frac{\beta}{1+\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{-\alpha u}{e} \sin \beta u \operatorname{li} \left(\frac{-u}{e} \right) du = - \frac{\beta \sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2} - \alpha \operatorname{Arctan} \frac{\beta}{1+\alpha}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\operatorname{li} \left(\frac{-\alpha}{e} \right) = - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Arctan} \omega}{\omega} \cos \alpha \omega d\omega, \quad \infty \geq \alpha \geq 0$$

$$\operatorname{li} \left(\frac{-\alpha}{e} \right) = - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln(1+\omega^2)}{\omega} \sin \alpha \omega d\omega, \quad \infty > \alpha > 0.$$

§. 9.

$$\int_0^\infty \frac{-\alpha x}{e} \ln x dx = - \frac{1}{\alpha} (C + \ln \alpha), \quad C = 0,5772156 \dots$$

§. 10.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(p+x)^{\mu+1}} = \frac{\ln p}{\mu p} + \frac{1}{\mu p} \int_0^1 \frac{x^{\mu-1}}{1-x} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(p+x)^{n+2}} = \frac{1}{(n+1)p} \left[\ln p - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(p+x)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(2n+1)p^{\frac{n+1}{2}}} \left[\ln p + 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) - 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) \right]$$

§. 11.

Für

$$\int_a^b f(x) \cos \theta x = \varphi(\theta), \quad \int_a^b f(x) \frac{-px}{e} dx = \psi(p), \quad \psi^m(p) = \frac{d^m \psi(p)}{dp^m}$$

ist

$$\frac{(2p)^{n+1}}{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{\varphi(\theta) d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n \left[\psi^n(p) - \frac{(n+1)n}{2 \cdot p} \psi^{n-1}(p) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4 \cdot p^2} \psi^{n-2}(p) - \dots \right]$$

Ferner ist für

$$\int_a^b f(x) \sin \theta x = \varphi(\theta), \quad \int_a^b f(x) \frac{-px}{e} dx = \psi(p)$$

$$\frac{2(2p)^n}{\pi} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{\theta \varphi(\theta) d\theta}{(p^2 + \theta^2)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n \left[\psi^n(p) - \frac{n(n-1)}{2 \cdot p} \psi^{n-1}(p) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 4 \cdot p^2} \psi^{n-2}(p) - \dots \right]$$

$$\int_0^\infty \frac{k^2 \theta^2}{e^{\frac{1}{2}k^2 \theta^2}} \cos h\theta \, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2k} \frac{h^2}{e^{\frac{1}{4}k^2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\mu}}{e^{(\alpha^2 x^2 + \frac{\beta^2}{x^2})}} dx = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos 2\beta\theta \, d\theta}{(\alpha^2 + \theta^2)^{\mu+1}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{e^{(\alpha^2 x^2 + \frac{\beta^2}{x^2})}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \left[1 + \frac{(n+1)n}{2} \left(\frac{1}{2\alpha\beta}\right) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4} \left(\frac{1}{2\alpha\beta}\right)^2 + \dots\right] \frac{2\alpha\beta}{e^{2\alpha\beta}}$$

Für $M_1 = \frac{(n+1)n}{2}$, $M_2 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4}$, etc. ist:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{c\Gamma(\mu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty \frac{x^{n+\mu} dx}{(a+bx+cx^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} \\ & = \frac{\Gamma(\mu)}{(b+2\sqrt{ac})^\mu} + \frac{M_1}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{\Gamma(\mu-1)}{(b+2\sqrt{ac})^{\mu-1}} + \frac{M_2}{(2\sqrt{ac})^2} \cdot \frac{\Gamma(\mu-2)}{(b+2\sqrt{ac})^{\mu-2}} + \dots \\ & = \Gamma(\mu) + \frac{(n+1)n}{2} \Gamma(\mu-1) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 4} \Gamma(\mu-2) + \dots \end{aligned} \right\} \mu > n.$$

Für

$$A_{2n+2} = \int_0^1 \frac{f(x) dx}{2n+2 \sqrt{1-x^2}}$$

ist:

$$\frac{(-1)^m}{2m+1} \int_0^\infty \frac{x^{2m} f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx}{x}$$

$$= 2A_2 - \frac{(m+1)m}{2 \cdot 3} 2^3 A_4 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 2^5 A_6 - \dots$$

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 dx}{\sqrt{1+(2-4c^2)x^2+x^4}} = \frac{1}{2} F^1(c) + \frac{3}{8} \cdot \frac{E^1(c) - F^1(c)}{c^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^6 dx}{(1+x^2)^5 \sqrt{1+(2-4c^2)x^2+x^4}} = \frac{2c^2+1}{8c^2} E^1(c) - \frac{1-c^2}{8c^2} F^1(c).$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(-1)^m}{(2m+1)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(p+m+1)\Gamma(p-m)}{\Gamma(2p+1)} \\ & = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} - \frac{(m+1)m}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2^2 \Gamma(p-1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2}-1)} + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{2^4 \Gamma(p-2)}{\Gamma(p+\frac{1}{2}-2)} - \dots \end{aligned} \right\} p > m.$$

Im Verlage von Fr. Frommann in Jena ist früher erschienen:

- Jacobi, C. F. A.**, de quadrangulorum proprietatibus quibusdam minus adhuc cognitis commentatio geometrica. 4 maj. (Mit 3 Steintafeln.) 1838. geh. 15 Sgr.
- — commentatio geometrica de proprietate rectarum punctum quoddam ita transeuntium ut anguli, ad quos binae sibi proximae secantur, sint inter se aequales. 4 maj. 1840. geh. 5 Sgr.
- Kries, Friedrich**, Lehrbuch der reinen Mathematik. Sechste sorgfältig durchgesehene und verbesserte Auflage. 8. (Mit 200 eingedruckten Holzschnitten.) 1 Thlr. 22½ Sgr.
- — Lehrbuch der Physik. Fünfte sorgfältig verbesserte und vermehrte Auflage. 8. (Mit 43 Holzschnitten.) 1835. 1 Thlr. 5 Sgr.
- — Sammlung physikalischer Aufgaben nebst ihrer Auflösung. Zum Gebrauch in Schulen und bey dem Selbstunterricht. 8. (Mit zwei Kupfer-Tafeln.) 1843. 15 Sgr.
- Kunze, C. R. W.**, Lehrbuch der Geometrie. Erster Band: Planimetrie. 8. (Mit sieben in Kupfer gestochenen Figurentafeln.) 1842. 1 Thlr.
- Schrön, Dr. L.**, Tafeln der drei- und fünfstelligen Logarithmen, bezüglich für die Zahlen von 1—1400 und 1—14000. 4. 1838. 7½ Sgr.
- Swinden, J. H. van**, Elemente der Geometrie, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt von C. F. A. Jacobi. gr. 8. (Mit 405 Figuren auf 21 Tafeln.) 1834. 3 Thlr.

Schlömilch, Oskar,

Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale

Jena 1843

4 Math.p. 401,1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053982-5